

エネルギーによる液状化判定法の適用性検討と FL 法との対比：補遺

國生 剛治¹

1 中央大学名誉教授

概 要

筆者らは応力より直接的に液状化を支配する物理量として損失エネルギーに着目し、それと関連付けた累積ひずみエネルギーを地震波動エネルギーと比較することにより簡便に液状化判定できる手法を前論文で提示した。またこのエネルギー法をモデル地盤や既往液状化事例に適用し、周期や継続時間などが異なる地震動について従来の応力法（FL 法）よりも適切に評価できる可能性を示した。本エネルギー法では、上昇波動エネルギーを算定しそれを地盤各層の液状化エネルギー容量と直接対比する点がこれまでにない特徴である。本補遺では、前論文で十分には触れなかった波動エネルギーの算定と損失エネルギーとの対比の理論的根拠、室内載荷試験との関連を整理し、判定の簡素化のために組み入れた近似の考え方について述べる。さらに FL 法との判定結果の乖離が大きかった液状化事例を再び取り上げ、エネルギー法に組み込んだ近似がもたらす影響について検討を加える。

キーワード：液状化判定，波動エネルギー，損失エネルギー，ひずみエネルギー，応力ひずみ履歴ループ

1. はじめに

筆者は既に非排水繰返し三軸試験結果のエネルギー的分析に基づきエネルギー法の特長を生かした簡易液状化判定法を提案し、モデル地盤に適用して応力法（FL 法）と比較することにより適用性と特徴を調べた¹⁾。さらに、継続時間や卓越振動数の異なる地震動を均質モデル地盤に入力し、エネルギー法と FL 法への影響を対比した¹⁾。さらに 2011 年東北地方太平洋沖地震で液状化した千葉県浦安市と 2003 年十勝沖地震で液状化した北海道北見市端野町の地盤に、その近傍で観測された地震波を入力して液状化判定を行い、実際の液状化挙動との対比から両方法の適用性と特徴を調べた²⁾。

その結果、現行の FL 法と今回提案したエネルギー法は幾つかの代表的地震動について類似の判定結果を与え、ある程度の整合性が確認できた。しかし、加速度が小さい割に周期や継続時間が長くエネルギーが大きい地震動あるいはその逆のような地震動の場合に両者の差は大きくなり、FL 法で行われる地震動の等価せん断応力振幅の補正ではそのギャップを調整できなくなる場合があることが分かった。一方エネルギー法では液状化発生に一意的に結

びついた損失エネルギーに着目しているため、多岐にわたる地震動への適用性が期待され、現在定着している FL 法の特異な地震動への適用性を確認するための補足的手段として普及することが期待される²⁾。

エネルギーに基づく液状化予測の基本原理は応力法と似て、地盤各層が有する液状化発生に対応した損失エネルギー（エネルギー容量）と地震動による供給エネルギーとの大小関係を比較することである。このような原理によるエネルギー法としては、世界的にも筆者の知る限り風間らが以前に提案した方法³⁾と筆者らの方法^{1), 2)}のみである。

風間らのエネルギー法では、地盤応答解析で各層の弾性ひずみエネルギー累積値を計算し、それより等価減衰定数を介して算定した地震時の損失エネルギー累積値を土が液状化するための損失エネルギー容量と比較している。その概要は以下のようなものである。

i) 等価線形解析で地盤各深度ごとの弾性ひずみエネルギーの時刻歴を次式により求める。

$$W_E(t) = \frac{1}{2} G_{eq} \{ \gamma(t) \}^2 \quad (1)$$

ここに等価せん断剛性 G_{eq} は等価線形解析ひずみ依存収束値である。

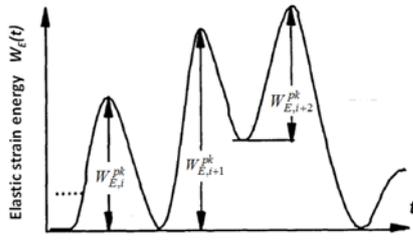


図 1 ランダム荷重を受けた土が蓄える弾性ひずみエネルギーの時刻歴の概念図 (風間ら³⁾の図に加筆)

- ii) 式(1)で計算し図 1 に概念的に示す弾性ひずみエネルギー時刻歴の i 番目のパルスの最大振幅値 $W_{E,i}^{pk}$ から、各最大振幅値毎に損失エネルギー ΔW_i を計算する。

$$\Delta W_i = 4\pi D_{eq} W_{E,i}^{pk} \times 1/2 \quad (2)$$

ここに D_{eq} はひずみ振幅あるいはひずみエネルギーに応じて決まる等価減衰定数である。また各パルスは半サイクルの载荷-除荷に対応しているため、 ΔW_i を半サイクルごとの損失エネルギーとするために $1/2$ を乗じている。

- iii) ΔW_i をパルスの出現順序に沿って累積した損失エネルギー $\sum \Delta W_i$ の時刻歴を描き、液状化の発生に対応した累積損失エネルギーとの比較により液状化判定する。

この方法では、地盤の応答解析で算定された式(1)のひずみエネルギーから減衰定数 D_{eq} を介して損失エネルギーを計算しているため、地震入力エネルギーを直接扱うことがなく、地震動のエネルギー的特性が把握できない。

一方、筆者らのエネルギー法¹⁾²⁾では設計地震動から決まる上昇波動エネルギーと地盤各層での液状化に関わる損失エネルギー (液状化エネルギー容量) を直接対比している。したがって、たとえ地震波時刻歴が無くても上昇波のエネルギーをマグニチュードや震源距離などから算定することにより⁴⁾⁵⁾⁶⁾液状化判定が行える。このように波動エネルギーを直接設計に用いて損失エネルギーと対比する方法は、筆者の知る限り従来からほとんど見られなかった。ただし、この対比には幾つかの条件設定が関わって

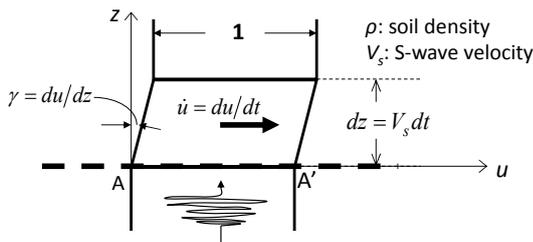


図 2 進行波のエネルギー算定のための概念図

いる。本補遺では、前論文では十分には触れなかったエネルギーの直接的対比に関わる波動エネルギー算定の設定条件や損失エネルギーとの関係、室内実験データの再吟味、前回の液状化事例の追加検討などについて述べる。

2. 地盤中の 1 方向進行波のエネルギー

本エネルギー法^{1), 2)}では、地震動供給エネルギーとして SH 波の上昇波エネルギー累積値を地盤各層で算定し、それと各層の液状化に対応したエネルギー容量とを対比している。前論文でも述べたように、上昇波エネルギーだけでなく地表や上方層境界で反射した下降波エネルギーも液状化に寄与する。しかしエネルギー的には下降波は元々上昇波に含まれていたものであり、上昇波エネルギー累積値のみを考慮することで簡素化を図っている。

一般的に波動エネルギーを考えるために、図 2 の A-A' 面を微小時間 Δt に通過して z 軸の正方向に伝播速度 V_s で伝わる SH 波を想定する。平面積が 1 で伝播距離 $dz = V_s \Delta t$ を高さとする微小要素の運動エネルギー増分 ΔE_k は、密度を ρ 、粒子速度を $\dot{u} = du/dt$ とすれば次式で表せる。

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho V_s \Delta t (\dot{u})^2 \quad (3)$$

一方、波動伝播により同じ微小要素にはせん断ひずみ $\gamma = du/dz$ が生じ、それによってひずみエネルギーも生じる。地盤に働く応力を τ 、せん断剛性を G 、せん断ひずみを γ とすると $\tau = G\gamma$ により、弾性ひずみエネルギー増分 ΔE_e は次式となる。

$$\Delta E_e = \int_0^\gamma V_s \Delta t \tau d\gamma = V_s \Delta t G \int_0^\gamma \gamma d\gamma = \frac{1}{2} V_s \Delta t G \gamma^2 \quad (4)$$

ここで、進行波については $\gamma = -\dot{u}/V_s$ が成り立つから⁴⁾、これを代入し $G = \rho V_s^2$ を使うと、結局、微小要素のひずみエネルギーとして次式が得られる。

$$\Delta E_e = \frac{1}{2} V_s \Delta t G \gamma^2 = \frac{1}{2} \rho V_s \Delta t (\dot{u})^2 \quad (5)$$

すなわち、 $\Delta E_e = \Delta E_k$ であり、微小時間 Δt の間に単位平面積を通過する波動エネルギー増分 ΔE は両者の和により次式のように表される⁴⁾。

$$\Delta E = \Delta E_e + \Delta E_k = \rho V_s \Delta t (\dot{u})^2 \quad (6)$$

つまり波動エネルギーは運動エネルギー (ΔE_k) 50% とひずみエネルギー (ΔE_e) 50% からなっていることを意味している⁷⁾⁸⁾。地震波の通過時間を $t = t_1 \sim t_2$ とすれば、その間に運ばれる累積エネルギーは次式となる⁴⁾。

$$E(t = t_1 \sim t_2) = \rho V_s \int_{t_1}^{t_2} (\dot{u})^2 dt \quad (7)$$

このように、波動の累積エネルギー E は一方向に進行す

る波について定義され、その単位は単位平面積当たりのエネルギーである。表層地盤での SH 波による鉛直 1 次元波動伝播を前提とすれば、地中地震記録は上下方向へ進行する波が重ね合わされたものとなる。それを上昇波と下降波に分離しそれぞれについて波動エネルギーを算出し、地盤中のエネルギーの流れ（エネルギーフロー）を評価できる⁹⁾¹⁰⁾。以下ではまず、均質地盤中を流れる 1 方向進行波の波動エネルギーと損失エネルギーを計算する。

一般に粘弾性地盤を伝わる 1 次元波動は次式で表わされる⁴⁾。ここに ω は角振動数、 k^* は内部減衰を考慮した複素波数、 A 、 B は振幅である。

$$u = Ae^{i(k^*z + \omega t)} + Be^{-i(k^*z - \omega t)} \quad (8)$$

ここでは z 座標の正方向に伝わる第 2 項のみを考え、それを次式のように変形する。

$$u = Be^{i(\omega t - k^*z)} = Be^{i\omega(t - z/V_s^*)} \quad (9)$$

地盤材料のような摩擦体に適用される非粘性フォークトモデルを適用し⁴⁾¹¹⁾、粘弾性体での S 波の複素伝播速度 V_s^* を複素せん断剛性 $G + iG'$ 、位相角 $\delta = \tan^{-1}(G'/G)$ 、密度 ρ を用いて、次式で表す。

$$\begin{aligned} V_s^* &= \sqrt{(G + iG')/\rho} = (G^2 + G'^2)^{1/4} e^{i\delta/2} / \rho^{1/2} \\ &= V_s (1 + \tan^2 \delta)^{1/4} e^{i\delta/2} \end{aligned} \quad (10)$$

これにより式(9)を変形すると次式が得られる⁴⁾¹¹⁾。

$$u = Be^{-\beta z} e^{i\omega(t - z/V_s')} \quad (11)$$

ここに、

$$V_s' = \frac{V_s}{(\cos \delta)^{1/2} (\cos(\delta/2))} \quad (12)$$

$$\beta = (\cos \delta)^{1/2} (\sin(\delta/2)) (\omega/V_s) = (\tan(\delta/2)) (\omega/V_s') \quad (13)$$

式(12)の V_s' は非粘性フォークト体での S 波速度であり、位相遅れ角 $\delta \ll 1.0$ すなわち減衰定数 $D = (\tan \delta)/2 \ll 1.0$ の場合には $V_s' \approx V_s$ で近似でき、式(13)の距離減衰定数 β は次式で近似できる。

$$\beta = (\tan(\delta/2)) (\omega/V_s') \approx (\omega \tan \delta) / (2V_s) = \omega D / V_s \quad (14)$$

式(11)の指数関数 $e^{-\beta z}$ は β が正值であるから距離 z とともに小さくなり、内部減衰による波動距離減衰を表している。

ここで、図 3 の 1 次元地盤モデルで鉛直上向きにとった z 軸に沿って上昇する SH 波の波動エネルギーとある距離を伝播する間の損失エネルギーを計算するため式(11)の波動の変位 u と速度 \dot{u} を次式のような調和関数で表わす。

$$u = Be^{-\beta z} \sin \omega(t - z/V_s) \quad (15)$$

$$\dot{u} = \omega Be^{-\beta z} \cos \omega(t - z/V_s) \quad (16)$$

1 波長 $\lambda = 2\pi V_s / \omega$ の調和波が有する波動エネルギーを計算するため、式(16)を式(7)の波動エネルギーの定義式に代入し、1 周期 ($t = 0 \sim 2\pi/\omega$) 区間を積分すると、

$$\begin{aligned} E &= \rho V_s \int_0^{2\pi/\omega} (\dot{u})^2 dt \\ &= \rho V_s \omega^2 B^2 e^{-2\beta z} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega(t - z/V_s) dt \\ &= \rho (\omega^2 B^2 e^{-2\beta z} / 2) \lambda \end{aligned} \quad (17)$$

座標 z での速度振幅 \dot{u}_a は調和波形の最大値だから

$$\dot{u}_a = \left| \omega Be^{-\beta z} \cos \omega(t - z/V_s) \right|_{\max} = \omega Be^{-\beta z} \quad (18)$$

また式(15)において $\beta \ll 1.0$ の場合、せん断ひずみは

$$\gamma = \partial u / \partial z \approx -Bke^{-\beta z} \cos \omega(t - z/V_s) \quad (19)$$

で近似でき、ひずみ振幅 γ_a は次式で表わせる

$$\begin{aligned} \gamma_a &= -Bke^{-\beta z} \left| \cos \omega(t - z/V_s) \right|_{\max} \\ &= -Bke^{-\beta z} = -\dot{u}_a / V_s \end{aligned} \quad (20)$$

したがって、式(17)の上昇波のエネルギー E は次式で表される。

$$E = \rho (\omega^2 B^2 e^{-2\beta z} / 2) \lambda = \left[\rho (\dot{u}_a)^2 / 2 \right] \lambda = \left[G \gamma_a^2 / 2 \right] \lambda \quad (21)$$

つまり 1 方向への進行波が運ぶ単位体積当たりのエネルギー（エネルギー密度） E/λ は

$$E/\lambda = \rho (\dot{u}_a)^2 / 2 = G \gamma_a^2 / 2 = W \quad (22)$$

となる。ここに W は後出の図 5(a) に概念的に示す繰返し載荷試験におけるせん断応力～せん断ひずみ関係履歴ル

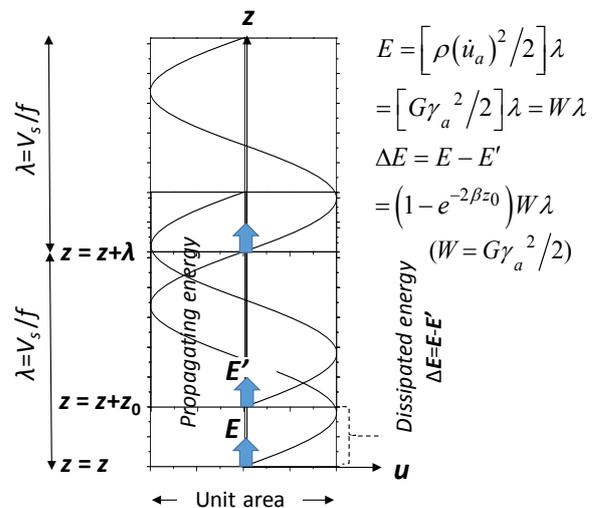


図 3 1 方向進行波の 1 波長当たりの波動エネルギーと損失エネルギーの算定

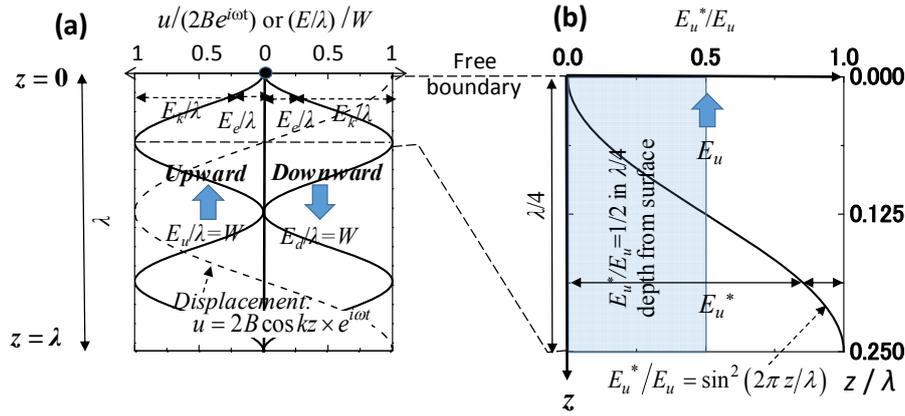


図4 地表反射による2方向波エネルギー密度(a)と1/4波長範囲の損失エネルギー負担可能上昇波エネルギー E_u^* の深度分布(b)

ープの半サイクル载荷に対応した最大弾性ひずみエネルギー $W = G\gamma_a^2/2$ に等しい。

既に式(6)で示したように式(22)で計算される上昇波のエネルギー密度は運動エネルギーとひずみエネルギーで50%ずつ受け持たれており、つまり $W/2$ ずつとなる。これは式(22)に示した速度振幅 $\dot{u}_a = \omega B e^{-\beta z}$ の進行波の1周期(1波長)間の平均的な運動エネルギー密度

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\rho \dot{u}^2 / 2) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\rho \dot{u}_a^2}{2} \cos^2 \omega(t - z_0/V_s) dt \quad (23)$$

$$= \frac{G\gamma_a^2}{4} = W/2$$

あるいはひずみ振幅 γ_a の進行波

$$\gamma = \gamma_a \cos \omega(t - z/V_s) \quad (24)$$

の1周期(1波長)間の平均的なひずみエネルギー密度

$$\frac{1}{T} \int_0^T (G\gamma^2 / 2) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{G\gamma_a^2}{2} \cos^2 \omega(t - z_0/V_s) dt \quad (25)$$

$$= \frac{G\gamma_a^2}{4} = W/2$$

に対応していることは明らかである。つまり速度振幅 \dot{u}_a とひずみ振幅 γ_a を兼ね備えた調和波が1方向に伝播する時、同一箇所の波動エネルギー密度 W は運動エネルギー密度とひずみエネルギー密度で $W/2$ ずつ分担される。

次に図3に示す $z = z + z_0$ まで進んだ1波長の波動エネルギー E' は式(21)より

$$E' = \rho \left(\omega^2 B^2 e^{-2\beta(z+z_0)} / 2 \right) \lambda = W e^{-2\beta z_0} \lambda \quad (26)$$

であり、1波長当たりの損失エネルギーは次式となる。

$$\Delta E = E - E' = (1 - e^{-2\beta z_0}) W \lambda \quad (27)$$

$z_0 = \lambda$ すなわち1波長間での損失エネルギーを考え、さらに $\beta = \omega D/V_s \ll 1.0$ つまり $D \ll 1.0$ の条件においてテーラー展開による $e^{-4\pi D} \approx 1 - 4\pi D$ の関係を使うと単位体積当たりの損失エネルギー密度は次式となる。

$$\Delta E/\lambda = (1 - e^{-2\beta\lambda}) W = (1 - e^{-4\pi D}) W \approx 4\pi D W \quad (28)$$

したがって、1波長間での損失エネルギーの波動エネルギーに対する割合は

$$\Delta E/E = 1 - e^{-4\pi D} \approx 4\pi D \quad (29)$$

であり、 $D \ll 1.0$ についての最右辺の近似式は、後出の図5(a)に示す応力～ひずみ履歴曲線についてのエネルギー式 $\Delta W/W = 4\pi D$ と全く同じ形である。ここに W は室内繰返し载荷試験において1/2サイクルで加える弾性ひずみエネルギーを意味するが、 $D \ll 1.0$ の場合には損失エネルギーがわずかで W がほぼ全量回収でき波動伝播においては次の1/2サイクルにそのまま使えるため、 $\Delta E/E = \Delta W/W = 4\pi D$ の関係が成り立つことになる。

以上よりエネルギー密度 E/λ の進行波は運動エネルギー $W/2$ とひずみエネルギー $W/2$ から構成され、波動伝播により1波長当たり式(28)の損失エネルギーが発生する。この際には、ひずみエネルギーのみでなく運動エネルギーもひずみエネルギーに転換可能で同量ずつ損失エネルギーを分担することになる。

3. 地表境界の影響

ここまでは地盤中の1方向進行波を考えてきたが、次に振動数 ω の上昇波が地表自由境界で全反射し下降波となる場合の上昇波動エネルギー E_u と下降波動エネルギー E_d について考える。なおここでは取り扱いを簡単にするため、地盤の減衰定数を無視し $k^* \approx k$ とする。

図4(a)のように z 軸を鉛直下方に取り、式(8)の上昇・下降波動が自由境界で反射する条件を考えると、自由端($z=0$)でのひずみは

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} = ik(A - B)e^{i\omega t} = 0 \quad (30)$$

であるから $B=A$ の全反射が起きる。したがって自由端 ($z=0$) では $u = 2Be^{i\omega t}$ と変位振幅は上昇波の 2 倍となる。また深さ方向の変位 u 、速度 \dot{u} 、ひずみ γ はそれぞれ次式で表わされ、角振動数 ω での定常振動モードとなる。

$$u = Be^{i\omega t} (e^{ikz} + e^{-ikz}) = 2B \cos kz \times e^{i\omega t} \quad (31)$$

$$\dot{u} = 2B\omega \cos kz \times ie^{i\omega t} = 2i\dot{u}_a \cos kz \times ie^{i\omega t} \quad (32)$$

$$\gamma = 2Bk \sin kz \times (-e^{i\omega t}) = 2\gamma_a \sin kz \times (-e^{i\omega t}) \quad (33)$$

そして図 4(a)に破線カーブで示すように、波長を $\lambda = 2\pi V_s/\omega$ として振動の腹が地表面から $\lambda/2$ ごとに、その $\lambda/4$ 下に振動の節が $\lambda/2$ ごとに生じる。

この時の地表からの距離 z によるエネルギー変化を計算する。速度 \dot{u} とひずみ γ はそれぞれ

$$\dot{u} = 2iB\omega e^{i\omega t} \cos kz \quad (34)$$

$$= -2B\omega \sin \omega t \cos kz + 2iB\omega \cos \omega t \cos kz$$

$$\gamma = -2Bke^{i\omega t} \sin kz \quad (35)$$

$$= -2Bk \cos \omega t \sin kz - 2iBk \sin \omega t \sin kz$$

であるから、その実数部分を使って単位体積当たり 1 周期平均の運動エネルギー E_k/λ とひずみエネルギー E_e/λ を計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} E_k/\lambda &= \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \right| dt \\ &= \frac{2\rho B^2 \omega^2 \cos^2 kz}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \rho B^2 \omega^2 \cos^2 kz \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} E_e/\lambda &= \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{1}{2} G \gamma^2 \right| dt \\ &= \frac{2GB^2 k^2 \sin^2 kz}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \rho B^2 \omega^2 \sin^2 kz \end{aligned} \quad (37)$$

つまり図 4(a)に実線カーブで示すように振動の腹ではひずみエネルギーが 0% に対し運動エネルギーが 100% に、節ではその逆となる。つまり腹から節にかけて両エネルギーの分布状況が 100%~0% の一定割合で固定化していることになる。分かり易い例で言えば、振動の腹ではひずみエネルギーは常に 0% でなければならず、100% を占める運動エネルギーはひずみエネルギーに変換できないため、応力~ひずみ履歴ループに起因した損失エネルギーを分担できない。振動の節ではその逆であり、両者の中間でもそれぞれの割合に固定される。これは同じ位置のエネルギーが運動エネルギーとひずみエネルギー 50% ずつから成り、両者ともに損失エネルギーを分担できる進行波とは対照的である。また、2つのエネルギー密度の和は

$$\begin{aligned} E_k/\lambda + E_e/\lambda &= \rho B^2 \omega^2 (\sin^2 kz + \cos^2 kz) \\ &= \rho B^2 \omega^2 = 2W \end{aligned} \quad (38)$$

で深度 z によらず一定で上昇波・下降波を合わせて $2W =$

$\rho(\dot{u}_a)^2 = G\gamma_a^2$ 、つまり当然ながら上昇波の 2 倍となる。

次に上昇波エネルギー E_u のみに注目し、波長 λ で地表が振動の腹となるエネルギー密度 W の調和波の 1/4 波長深度 ($z/\lambda=0.25$) までを図 4(b)に拡大表示している。そこでこのエネルギー深度分布を式(37)を参照し次式で表わす。

$$E_u^*/E_u = \sin^2(2\pi z/\lambda) \quad (39)$$

ここに E_u^* は深度 z で損失エネルギーを負担できる上昇波エネルギーであり、 E_u は同じ深度で設定される全上昇波エネルギーである。前述のように自由表面近傍では運動エネルギーとひずみエネルギーの割合が固定化されるが、その影響は地表から地震波の代表的周期成分の 1/4 波長以浅に限って考えることとする。つまり $z/\lambda=1/4$ 以深では地震波の不規則性などにより地表境界の影響は及ばず、1 方向進行波として E_k と E_e の 50% ずつから成り両者が均等に損失エネルギーを分担できるが ($E_u^*/E_u = 100\%$)、地表に近づくほどエネルギー固定化の影響が現れ、地表では 100% 運動エネルギーに固定されひずみエネルギーはゼロ ($E_u^*/E_u = 0\%$) となると考える。

しかし実際の地震波では波形の不規則性や非線形物性の影響で現象は複雑であり、式(39)のような単一周期の調和波による定式化は難しい。そこで本エネルギー法¹⁾²⁾では、地震動の代表的周期成分 T について決まる地表から 1/4 波長深度までは、図 4(b)に示すように損失エネルギーを負担できる上昇波エネルギーの比率として平均値 1/2 を採用し、次式の関係を使っている。

$$E_u^*/E_u = 1/2 \quad (40)$$

多くの液状化問題で地震動の代表的周期は $T \geq 0.5 \sim 1$ s と考えると、地表から 1/4 波長深度は V_s の地震時低下を等価線形的に考慮した場合でも通常の液状化対象深度限界 20m 程度かそれ以上となり、そこでは上昇波エネルギーを 1/2 にして液状化判定することになる。

4. 波動エネルギーと室内試験エネルギーの関連性

繰返しになるが、本エネルギー法では地盤に供給される波動エネルギーの総量(累積値)と地盤の液状化に必要なエネルギー容量との直接的比較をしている。その際、下降波エネルギーは元々上昇波エネルギーに含まれているものであり、上昇から下降までの間に液状化以外の多少の距離減衰効果はあるにしても波動エネルギー総量としては上昇波累積値エネルギーでほぼ代表できると考えている。

いま原地盤の単位体積の土の波動損失エネルギーが室内繰返し載荷試験と同じ累積損失エネルギー密度に達し

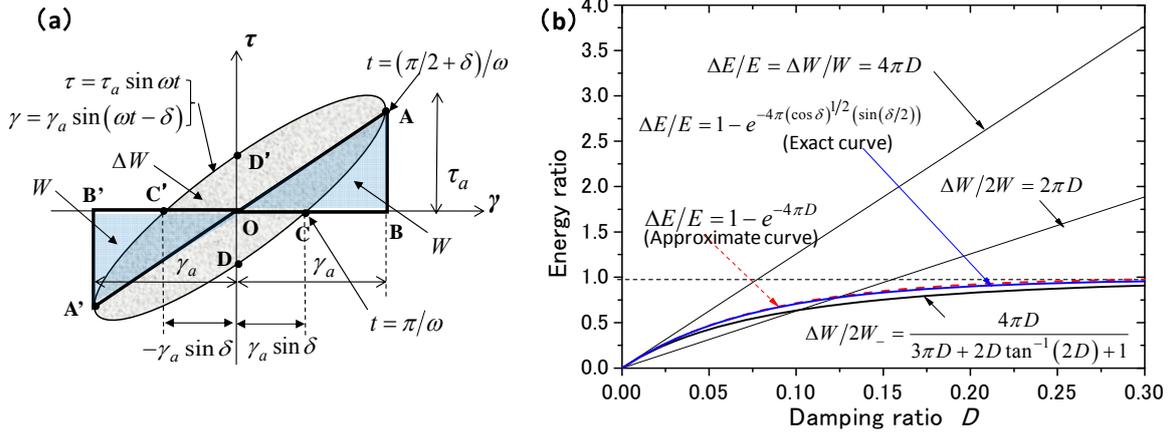


図5 粘弾性理論に基づいた繰返し載荷試験のエネルギーと波動エネルギーの関係：
 (a) 応力～ひずみ履歴ループ、(b) 繰返し載荷エネルギー比と波動エネルギー比の減衰定数 D に対する変化。

た時にその要素は液状化するとすれば、 $\Delta E/\lambda = \sum \Delta W$ である。実際、進行波の波動エネルギー密度は式(22)で得られたように $E/\lambda = W = G\gamma_a^2/2$ でひずみ振幅 γ_a による1サイクルの繰返し載荷に対応しているため、ひずみ振幅 γ_a の室内繰返し載荷試験と等しい損失エネルギー密度 $\Delta E/\lambda = \Delta W$ が発生すると考えて良い。図5(a)に概念的に示すように室内試験では1サイクルで $2W$ ($W = \text{Area}(\text{OAB}) = \text{Area}(\text{OA'B'})$) の弾性ひずみエネルギーを加えて $\Delta W = \text{Area}(\text{ACDA'C'D'})$ のエネルギーが損失する。これに必要な外部供給エネルギーを考えると、 ΔW が小さければ最初の1/2サイクルで加えた W はほぼ回収されるためそれを次の1/2サイクルで使用できることは既に述べた。しかし損失エネルギー ΔW が大きくなっても、図中の $\text{Area}(\text{ABC})$ に相当するエネルギーは波動伝播においては回収され、次の1/2サイクルの必要エネルギーの一部 ($\text{Area}(\text{A'B'C'})$) として使われることになる。 $\text{Area}(\text{ABC})$ のエネルギーは粘弾性体の基本理論⁴⁾¹¹⁾に基づき図5(a)を参考にして次式で算定される。

$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{ABC}) &= \int \tau d\gamma \\ &= \omega \tau_a \gamma_a \int_{(\pi/2+\delta)/\omega}^{\pi/\omega} \sin \omega t \cos(\omega t - \delta) dt \\ &= \Delta W [1 - 2(\pi/2 - \delta)D] / 4\pi D \end{aligned} \quad (41)$$

したがって1サイクルに必要な供給エネルギーを $2W_-$ と表記すると、それは ΔW と $\text{Area}(\text{ABC})$ の和として

$$\begin{aligned} 2W_- &= \Delta W + \text{Area}(\text{ABC}) \\ &= [\Delta W + \text{Area}(\text{ACDA'B'C'D'})] / 2 \\ &= (\Delta W / 4\pi D) \times \{3\pi D + 2D \tan^{-1}(2D) + 1\} \end{aligned} \quad (42)$$

のように表され、1サイクル内の損失エネルギーと供給エネルギーの比は次式となる。

$$\Delta W / 2W_- = 4\pi D / \{3\pi D + 2D \tan^{-1}(2D) + 1\} \quad (43)$$

図5(b)では式(29)による減衰定数 D に対する損失波動

エネルギー比 $\Delta E/E$ の変化を、式(43)で計算した室内試験の $\Delta W / 2W_-$ の変化と比較している。両者には多少の違いが見られるが、これは図中に示すように、式(14)での距離減衰係数を $\beta \approx \omega D / V_s$ で近似した場合と厳密解との比較による僅かな誤差(約2%)では説明できず、繰返し載荷と波動伝播の力学モデルの違いを反映していると考えられる。しかし $\Delta E/E$ と $\Delta W / 2W_-$ の差は10%以下に収まり $D \rightarrow \infty$ では1.0に漸近するようなほぼ同一の変化を示すことが分かる。また波動エネルギー比 $\Delta E/E$ は D が小さいうちは $\Delta W / W = 4\pi D$ に近いが、 D が増加するにしたがって $\Delta W / 2W_- = 2\pi D$ の関係に近づくことも分かる。

以上では1サイクル載荷の範囲を見ているが、一つの地震波全体についての波動エネルギー比 $\Delta E/E$ と三軸試験による $\sum \Delta W \sim \sum W$ 関係についても、同じ砂の一連の実験で減衰定数が液状化試験の全過程を通じ $D=0.1 \sim 0.2$ の範囲にあり平均的に $D \approx 0.15$ である¹³⁾ ことからほぼ同じ関係が成り立つと考えられる。したがって本エネルギー法¹⁾²⁾では実用性を考え次式の関係を用いている。なお、前述の風間ら³⁾のエネルギー法でも同じ関係を用いている。

$$\sum \Delta W / \sum 2W = 2\pi D \quad (44)$$

つまり液状化条件として波動損失エネルギーが室内試験での累積損失エネルギーと等しい $\Delta E/\lambda = \sum \Delta W$ とする場合、上昇波エネルギー密度 E/λ を2倍の累積弾性ひずみエネルギー密度 $\sum 2W$ と比較させることになる。いっぽう地表から1/4波長範囲にある液状化対象深度では、地表自由境界の影響として損失エネルギーを負担できる波動エネルギーの割合を式(40)により $E_u^*/E_u = 1/2$ で近似しているため、 E/λ を $\sum 2W$ と対比させることとなる。前論文¹⁾²⁾ではこれを E/λ を $\sum 4W$ と対比する手続きに置き換えており、本補遺でも以下ではこれにしたがうこととする。

5. 室内試験エネルギーの評価

図 6(a)には実際に三軸液状化試験で得られた応力～ひずみ関係の一例を示す。またこれら一連の試験¹²⁾から、ひずみエネルギー W (三角形 ODD' または OBB' の面積) を前論文と同様に 4 倍して $4W \rightarrow W^*$ で表示し、载荷サイクル順に累積した $\sum W^*$ を損失エネルギー ΔW (ループ ABCDA の面積) の累積値 $\sum \Delta W$ に対し図 6(b) に中抜き記号でプロットし、さらに次式で近似している(前論文¹⁾の式(7)では $4W \rightarrow W^*$ として Σ も省略しているが、ここでは $\sum W^*$ で表示)。なお、これらのエネルギー値はすべて有効拘束圧 σ'_c で基準化し無次元化している。

$$\sum W^* / \sigma'_c = 5.4 \times 10^{1.25 \times \log(\sum \Delta W / \sigma'_c)} \quad (45)$$

ところで、粘弾性理論の応力～ひずみ関係に基づき損失エネルギー比 $\Delta W / 2W_-$ の式(43)を誘導したのと同様の考え方で、実際の砂の室内試験で得られた応力～ひずみ関係を使って $\Delta W / 2W_-$ を各サイクル毎に計算することができる。すなわち、図 6(a)中に色付けした 1 サイクルの応力～ひずみループの Area(ABCDEA)に当たる損失エネルギー ΔW と Area(ABB'CDD'EA) のエネルギーを算定する。これより、式(42)に倣って 1 サイクルでの外部からの供給エネルギー $2W_-$ は次式で計算できる。

$$2W_- = [\Delta W + \text{Area}(\text{ABB'CDD'EA})] / 2 \quad (46)$$

ここでは $W^* = 4W$ と比較するため、 $2W_-$ を 2 倍して $W_-^* \equiv 2 \times 2W_-$ で表わし、各载荷サイクルまで順に累積した値 $\sum W_-^*$ を対応する累積損失エネルギー $\sum \Delta W$ に対して、図 6(b) に塗潰し記号でプロットしている。初期液状化の目安となる $\sum \Delta W = 0.02 \sim 0.04$ 以下では両者は近い値を

とるが、それ以上では $\sum W_-^*$ は $\sum W^*$ の下側に位置し、 $\sum \Delta W$ の全範囲を通じて以下のようにほぼ勾配 2.0 の比例関係 (決定係数 $R^2=0.997$) で近似できることが分かる。

$$\sum W_-^* / \sigma'_c = 2.06 \times \sum \Delta W / \sigma'_c \quad (47)$$

式(45)と式(47)の違いの原因は、前者では 1 サイクルの载荷で地盤材料に原点 O と履歴ループの頂点 A とを直線で結んだ弾性ひずみエネルギー $2W$ を与えるとしているのに対して、後者では前半 1/2 サイクルでの回収エネルギーが後半 1/2 サイクルに使われる効果を考慮した $2W_-$ を外部供給エネルギーとして与えていることによる。さらに図 6(a)の例からも分かるように、実際の応力～ひずみ関係では大きなひずみ範囲でサイクリックモビリティの影響が大きいことも図 6(b)の両者の違いに影響していると思われる。ここで前述の $W_-^* \equiv 2 \times 2W_-$ の置換えを思い出すと、式(47)より $\sum W_-^* / 2 = \sum 2W_- \approx \sum \Delta W$ であり、外部からの累積供給エネルギー $\sum 2W_-$ と対応する累積損失エネルギー $\sum \Delta W$ はほぼ等しい。つまり液状化を生じる累積損失エネルギーとそのための外部累積供給エネルギーは液状化過程を通じてほぼ 1:1 の関係であることを意味している。なお、砂の液状化試験に立ち返れば、初期液状化は相対密度や細粒分含有率の違いにも関わらずほぼ $\sum \Delta W / \sigma'_c = 0.02 \sim 0.04$ の範囲内で生じているので、通常の液状化判定では式(45)または式(47)のいずれを使っても結果に大きな差は生じない。ただし、初期液状化以降の大きなひずみ発生を対象とする場合には、累積弾性ひずみエネルギー $\sum W^*$ を前提とした式(45)ではなく、非線形応力～ひずみ関係を考慮した累積供給エネルギー $\sum W_-^*$ による式(47)を使う必要がある。

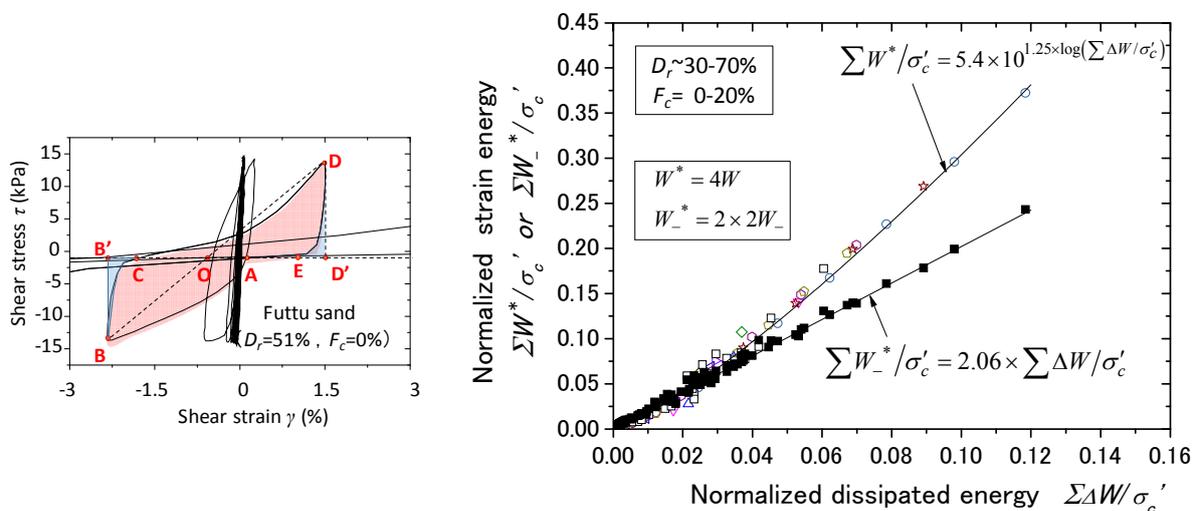


図 6 室内三軸繰返し载荷試験での応力ひずみ関係の一例 (a)と三軸液状化試験による累積ひずみエネルギー $\sum W^*$ 、 $\sum W_-^*$ と累積損失エネルギー $\sum \Delta W$ の関係 (b)

6. ケーススタディーの追加検討

前述のように本エネルギー法では損失エネルギーを賄うことが可能な波動エネルギー E_u^* が地表に近づくほど上昇エネルギー E_u に対して低減する効果を深さによらず 1/2 一定として式(40)により単純化している。しかしながらこの低減効果は大なり小なり地表からの深さに依存しているはずであり、その影響を確認しておくことが望まれる。このため、前論文²⁾で検討したケースヒストリーのうち応力法と液状化判定結果が特に大きく異なった 2003 年十勝沖地震での北見市端野町のケースヒストリーについて、この低減効果を調和波の極端な条件の下で評価してみた。

地盤条件、液状化実験データ、地震条件は前論文²⁾の通りであるが、ここでは深度による低減効果を式(40)により $E_u^*/E_u = 1/2$ 一定とした前論文²⁾での方法（以下で A 法と呼ぶ）に代わり、代表的調和波の深度による低減係数を用いた式(39)に示す方法（以下で B 法と呼ぶ）で計算して

みる。計算手続き上、式(39)を次式のように書き替える。

$$E_u^*/E_u = \sin^2(2\pi z/\lambda) = \sin^2(2\pi t/T) \quad (48)$$

ここに、 t は地表から各層ユニットまでの S 波の通過時間、 T は地震動の卓越周期とする。例として調査点 P1 と P7 についてのエネルギー B 法の評価結果を前論文と同じ FL 法・エネルギー A 法の結果と合わせて表 1 に示している。A 法の計算手順は前論文で述べた通りであるが、B 法については以下の通りである。なおこれ以降では前論文と同様に、文中・図表を含めて載荷サイクルについての累積和記号 Σ は省略し、和記号は以下で述べる AER 算出においてのみ用いるものとする。

- i) 各調査点の層ユニット厚 $H=1\text{m}$ 毎の等価線形収束 V_s 値を用いた通過時間 $t(\text{s})$ と入力地震動 (K-NET 北見 EW 記録) の加速度応答スペクトルの卓越周期 $T=0.55\text{s}$ から、式(48)により各層ユニット毎に E_u^* を算定する。
- ii) i) で算定した E_u^* を用いて各層ユニットごとの液状化

表 1. 2003 年十勝沖地震での端野町液状化ケースヒストリーのエネルギー法 (A・B 法) による再評価：
(a) 調査点 P1, (b) 調査点 P7

深度(m)		FL法					エネルギー法										
		R	$r_n=0.65$		$r_n=0.70$		W^*H (kN/m ²)	A法				B法					
			L	FL	L	FL		E_u (kN/m ²)	W^*H/E_u (%)	順位	AER (%)	E_u^*/E_u	$W^*H/2E_u^*$ (%)	順位	AER (%)		
1	L1																
2	L2	0.10	0.04	2.34	0.05	2.17	0.43	3.32	13	①	13	0.063	102	②	34		
3	L3	0.11	0.05	2.12	0.06	1.97	0.76	3.58	21	②	34	0.139	76	①	21		
4	L4	0.14	0.06	2.44	0.06	2.27	2.13	4.46	48	③	82	0.224	107	③	82		
5	L5	0.20	0.06	3.33	0.06	3.09	9.27	5.99	155	④	237	0.300	257	④	237		

深度(m)		FL法					エネルギー法									
		R	$r_n=0.65$		$r_n=0.70$		W^*H (kN/m ²)	A法				B法				
			L	FL	L	FL		E_u (kN/m ²)	W^*H/E_u (%)	順位	AER (%)	E_u^*/E_u	$W^*H/2E_u^*$ (%)	順位	AER (%)	
1	L1															
2	L2															
3	L3	0.09	0.04	2.24	0.04	2.08	0.51	2.84	18	①	18	0.100	89	④	109	
4	L4	0.09	0.04	2.06	0.05	1.91	0.67	2.98	22	②	40	0.203	55	③	86	
5	L5	0.10	0.05	2.09	0.05	1.94	1.00	3.29	30	③	71	0.321	47	②	64	
6	L6	0.10	0.05	2.00	0.05	1.86	1.13	3.34	34	④	104	0.447	38	①	34	
7	L7	0.17	0.05	3.17	0.05	2.94	7.60	5.24	145	⑤	249	0.551	132	⑤	254	

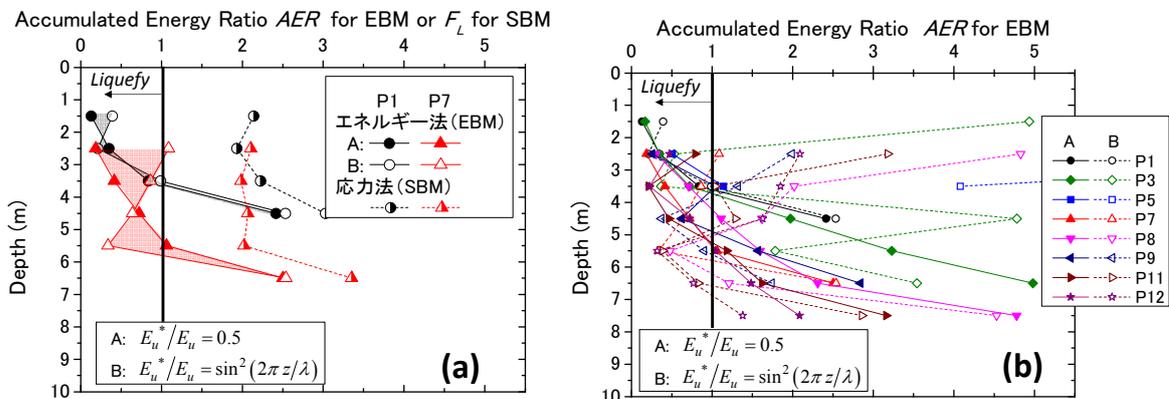


図 7 2003 年十勝沖地震での端野町液状化ケースヒストリーのエネルギー法 (EBM : A・B 法) による再評価と FL 法 (SBM) との比較 : (a) 調査点 P1, P7, (b) 全調査点.

エネルギー容量と供給エネルギーの比 $W^*H/2E_u^*$ を計算し、その値が小さい順に順番付けする。ここに分母の2はA法での上昇エネルギー設定 $E_u^*/E_u = 1/2$ に対応し $W^* = 4W$ としているため必要である。

- iii) その順番でA法による W^*H/E_u を順次加え合わせ、 $W^*H/2E_u^*$ と $AER = \sum W^*H/E_u$ が共に100%以下のユニットが液状化すると考える¹⁾²⁾。

このようにして液状化するとされた層ユニットを表1に色付けして示している。調査点P1では $W^*H/2E_u^*$ が100%を数%上回ったユニットも評価精度の粗さを考慮して液状化すると判断すれば、A法とB法のいずれも深度2~4mで液状化することになる。P7についてはA法では3~5mであった液状化深度が4~6mと多少深くなる。

図7(a)では両調査点(P1, P7)のエネルギー比AERの深度分布をA法とB法で比較している。B法はA法に比べ当然浅い深度で液状化し難くなる傾向が見られるが、その違いはさほど大きくはない。いずれにしても、実際の液状化挙動は図中に色付けしたA法とB法に挟まれた比較的狭い範囲にあると考えられ、同図に重ね書きした応力法(FL法)が全く液状化しない評価になるのとは対照的である。図7(b)には、以前にA法で評価した他の調査点の判定結果¹⁴⁾も加えB法で評価した全体的結果と比較している。B法では全体的に液状化深度は深くなる傾向はあるもののP5を除けばすべての調査点で液状化が発生することになり、全調査点で液状化する可能性は全くないFL法の評価とは大きく異なることは前論文と変わりはない。さらにエネルギー法の中では、A法は浅い深度では安全側の評価になることから、単一調和波振動を仮定し浅い深度で極端に液状化し難くなるB法よりも実用的と言えよう。

7. まとめ

前論文¹⁾で提示したエネルギーに基づく液状化判定法においては、上昇波動エネルギーと各層ユニットの液状化エネルギー容量を直接対比しているが、その対比に関わるエネルギーの設定法と関連事項について補足考察した結果は以下のように要約できる。

- 1) 1方向に進行する波長 λ 、速度振幅 \dot{u}_a 、ひずみ振幅 γ_a の調和波動のエネルギー密度 E/λ は運動エネルギーで表わせば $\rho(\dot{u}_a)^2/2$ 、ひずみエネルギーで表わせば $W = G\gamma_a^2/2$ となる。同一位置の波動エネルギーは50%の運動エネルギーと50%のひずみエネルギーからなり、両者は波動伝播に伴う損失エネルギー ΔE を等分に負担する。
- 2) エネルギー E の1方向進行波が1波長進行する間に

生じる損失エネルギー ΔE の割合は $\Delta E/E = 1 - e^{-4\pi D}$ で表わされる。1サイクルの室内繰返し載荷試験と比較すれば、前半の1/2サイクルで回収されたひずみエネルギーを後半の1/2サイクルで再使用する場合の供給エネルギー $2W$ の損失エネルギー ΔW に対する比 $\Delta W/2W$ にはほぼ等しいことが示された。減衰定数 $D \ll 1.0$ の条件では $\Delta E/E = 4\pi D$ となり室内繰返し載荷試験での関係 $\Delta W/W = 4\pi D$ に同じ形となる。一方、 D が増加するにしたがい $\Delta W/2W = 2\pi D$ の関係に近づく。したがって上昇波のエネルギー損失メカニズムを室内試験で近似するためには、上昇波エネルギー密度 E_u/λ を応力~ひずみ履歴ループから算定される累積弾性ひずみエネルギー密度の2倍 $\sum 2W$ と対比させることが適切である。

- 3) 地表自由境界で全反射が生じる場合、地盤中には2方向進行波が生じるが、液状化検討のための累積エネルギーとしては下降波分も含んでいる上昇波エネルギー E_u のみを考慮することで十分である。ただし自由境界から1/4波長範囲では損失エネルギーを賄えるエネルギー E_u^* が低減する効果を考慮し、かつ地震波の不規則性や非線形地盤物性を考えて平均的に $E_u^*/E_u = 1/2$ で近似すると、 $E/2\lambda$ を $\sum 2W$ と対比させることになる。このような考え方に基づき、前論文^{1), 2)}では E/λ を $\sum 4W$ と比較している。
- 4) 室内試験で通常用いられる $\Delta W \sim W$ 関係の W は弾性ひずみエネルギーを仮定しているため、液状化実験での非線形応力ひずみ関係に戻り1サイクル中の損失エネルギー ΔW と外部供給エネルギー $2W$ の関係を再整理した。その結果、サイクリックモビリティの影響や1/2サイクルで回収される外部供給エネルギーの再使用の効果により、液状化を生じる累積損失エネルギー密度とそのための外部累積供給エネルギー密度は液状化過程を通じてほぼ1:1の関係であることが示された。
- 5) 上記3)で述べた $E_u^*/E_u = 1/2$ の近似による影響を見るため、前論文²⁾で扱ったケースヒストリーのうち応力法(FL法)との乖離が大きかった2003年十勝沖地震で端野町で起きた液状化を対象に、入力地震動の卓越周期を持つ調和波の地表から1/4波長範囲でのエネルギー E_u^* の低減率を当てはめて再評価を行った。その結果、液状化深度は $E_u^*/E_u = 1/2$ で近似した場合より多少深くなるものややはり液状化する判定となり、全く液状化の可能性のないFL法とは大きく異なる結果が再確認できた。

以上のように本エネルギー法では、供給エネルギーと損失エネルギー（液化化エネルギー容量）の直接対比により簡便に液化化判定できる。地震動のエネルギー的特徴を反映し易く、すでに実用化されている応力法と同じく簡易判定法としての限界はあるものの、その補足的方法として使われることが期待される。供給エネルギーや損失エネルギーの評価において幾つかの近似を導入しており、今後さらに多くのケースヒストリーとの比較計算の積み重ねによりその信頼性を確認していくことが必要である。

参 考 文 献

- 1) 國生剛治（2013）エネルギーによる液化化判定法の適用性検討とFL法との対比，地盤工学ジャーナル， Vol.8, No.3, 463-475.
- 2) 三森祐貴・國生剛治（2014）：エネルギーによる液化化判定法とFL法との比較—種々の地震動・地盤条件での検討—，地盤工学ジャーナル， Vol.9, No.4, 603-618.
- 3) 風間基樹，鈴木崇弘，柳沢栄司（1999）：地盤に入力された累積損失エネルギーの評価法と液化化予測への適用，土木学会論文集 No.631/III-48, 161-177.
- 4) 國生剛治（2014）：地震地盤動力学の基礎—エネルギー的視点を含めて—，第1章，鹿島出版会，5-36.
- 5) 國生剛治，鈴木 拓（2011）：強地震鉛直アレー記録に基づいた地盤中の波動エネルギーフロー，日本地震工学会論文集 第11巻，第1号，14-31.
- 6) 國生剛治，鈴木 拓(2012)：強地震鉛直アレー記録に基づいた地盤中の波動エネルギーフロー（補遺），日本地震工学会論文集， 第12巻，第7号，62-68.
- 7) Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951): Theory of Elasticity, McGraw-Hill.
- 8) Sarma, S. K. (1971): Energy Flux of Strong Earthquakes, *Tectonophysics*, Elsevier Publishing Company, 159-173.
- 9) 國生剛治，本山隆一（2000）：地震波の上昇波と下降波の分離による表層地盤でのエネルギー収支，土木学会論文集 No.652/III-51, 257-267.
- 10) 國生剛治，本山隆一，万谷昌吾，本山 寛（2004）：表層地盤における地震波のエネルギーフローと性能設計，日本地震工学会論文集，第4巻，第4号，1-20.
- 11) 石原研而（1976）：土質動力学の基礎，鹿島出版会.
- 12) 伊藤文樹，國生剛治，長尾洋太（2011）：非塑性細粒分を含む砂の液化化強度～コーン貫入抵抗関係への年代効果の影響，土木学会論文集C，Vol.67, No.1, 26-35.
- 13) 國生剛治（2014）：液化化地盤における免震メカニズムのエネルギー的検討，日本地震工学会論文集 Vol.14, No.1, 85-96.
- 14) Kokusho, T. ,Mimori, Y. and Kaneko Y. (2015): Energy-Based Liquefaction Potential Evaluation and its Application to a Case History, Proc. 6th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Christchurch, NZ, Paper #66.

(2016. 2. 24 受付)

Applicability of energy-based liquefaction potential evaluation method compared with FL-method –Supplement–

Takaji KOKUSHO¹

1 Professor Emeritus, Department of Civil & Environment Eng., Chuo University

Abstract

Energy-based liquefaction evaluation method was previously proposed and applied to simple soil models and case histories to show its general usability for a variety of seismic motions. The key of the proposed method is to compare cumulative upward wave energy with energy capacity of each layer, though theoretical background in this respect was not fully addressed in the previous paper. In this supplement, seismic wave energy and associated dissipated energy in one-dimensionally upward propagating SH-wave are formulated and discussed how to compare with liquefaction energy capacity in a simplified procedure using associated cyclic loading soil test data in the laboratory. Some additional case study is accordingly conducted to confirm the applicability of the simplified procedure in this energy-based method.

Key words: liquefaction potential evaluation, wave energy, dissipated energy, strain energy, stress-strain hysteresis