

# 「地盤工学2（土質力学）」講義ノート

中央大学工学部都市環境学科教授

國生 剛治

## 目次

1	地盤工学と土質力学	1
1.1	地盤工学の目的と役割	1
1.2	地盤工学の特徴	3
1.3	土質力学の3つのキーワード (有効応力、排水・非排水、ダイレイタンス)	4
1.4	有効応力の考え方	4
1.5	地盤工学のための弾性定数	7
1.6	弾性地盤中の水平応力	8
1.7	排水・非排水条件と水平土圧	8
1.8	等方応力増分による間隙水圧変化	10
2	地盤の圧密	12
2.1	圧密とは	12
2.2	有効応力と鉛直ひずみの関係	13
2.3	正規圧密・過圧密	14
2.4	最終圧密沈下量の計算法	16
2.5	圧密の時間経過一圧密方程式一	17
2.6	圧密方程式の解法	18
2.7	圧密沈下量の時間経過の計算法	21
2.8	圧密試験	23
2.9	2次圧密現象	24
2.10	地盤の全沈下量の計算法	25
2.11	パーティカルドレーンによる圧密促進工法	25
3	地盤のせん断破壊	27
3.1	せん断とダイレイタンス	27
3.2	非排水条件でのダイレイタンスを考慮した 間隙水圧の評価法	29
3.3	モールの応力円による応力状態の表示	29
3.4	モールの応力円の極	32
3.5	地盤のせん断破壊と土のせん断試験	33
3.6	せん断試験での応力～ひずみ関係	38
3.7	排水・非排水条件とせん断強度	40

3.8	粘土の非排水強度の深さによる増加割合 ( $c_u/p'$ )	44
3.9	非排水強度を用いた粘土地盤の安定解析	46
3.10	せん断試験の応力経路 ( $p\sim q$ 面) 表示	47
3.11	原地盤でのせん断強度の簡易評価法	48
4	土圧	51
4.1	土圧の基本的性質	51
4.2	静止土圧	52
4.3	ランキンの主働・受働土圧	52
4.4	クーロンの主働・受働土圧	54
4.5	主働土圧に対するよう壁の安定計算	57
4.6	たわみ性よう壁での土圧	58
5	地盤中の水の流れ	60
5.1	ダルシーの式	60
5.2	透水係数への影響因子	61
5.3	透水係数の測定法	62
5.4	種々の地盤の透水係数と地下水の移動速度	63
5.5	成層地盤の透水係数の異方性	64
5.6	地下水流による浸透力と有効応力変化	65
5.7	地下水流による地盤の破壊	66
5.8	地下水のポテンシャル関数	69
5.9	地下水の流れ関数	69
5.10	フローネット解析	71
5.11	地下水面のある流れの解法	72
6	地震時の地盤の挙動	74
6.1	地盤中の地震波の伝播	74
6.2	S H波、P波の1次元伝播式	75
6.3	S H波により土が受ける応力と試験機での再現	77
6.4	液状化現象とその影響	79



## 1 地盤工学と土質力学

地盤工学と呼ばれる学問の主な領域は、もともとは土質力学 (Soil Mechanics) と呼ばれ、テルツアギ (Terzaghi) により 1940 年代に Theoretical Soil Mechanics (理論土質力学) として体系化された学問分野である。その後、構造物の大型化・重要度の増加、防災・環境問題の進展などにもとない取り扱う分野が拡大し、最近では土質力学、岩盤工学、地質工学、地震工学、地盤環境工学などを含む総合工学として地盤工学(Geotechnical Engineering)と呼ばれるようになった。そのなかで、土質力学は地盤を構成する材料の力学特性を理解する上で最も基本となる学問分野である。

### 1.1 地盤工学の目的と役割

#### (1) 構造物の支持力の確保、沈下の抑制など (図 1.1)

当然のことながら、地球上のすべての構造物は地盤の表面か内部に作られている。すなわち、地盤は構造物を支え、また地盤中の構造物と境界を接する。木造住宅のような軽い構造物では、丘陵地の比較的硬い地盤であれば、十分支持力があるため、沈下したり傾いたりする問題は生じない。しかし、鉄筋コンクリートや鉄骨などでつくられるビルディングや、橋、鉄塔、その他の重たい構造物を建設する時、地表近くの地盤の支持力では不足するため、地盤を深く掘削して硬い支持層に基礎を設置するか、支持層まで達する杭などの基礎構造で支えるかをする必要が生じる。

また、河川沿いの低地や沖積粘土地盤ではそれほど重くない構造物でも支持力が不足する場合が多く、杭をはじめとする種々の基礎を用いたり、地盤改良によりあらかじめ地盤を強化したりする手段がとられる。

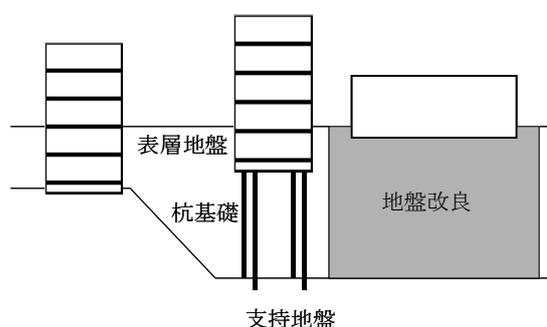


図 1.1 基礎構造や地盤改良による支持力の確保と沈下の抑制

#### (2) 構造物の基礎掘削・地下構造物の建設 (図 1.2)

都会を歩いていると、ビル工事や地下鉄工事などで地下の掘削をしている現場に出くわすことが多い。地盤を掘るには周りの地盤が崩れてこないような対策が必要で、鋼矢板や鉄筋コンクリートの壁により周りの地盤を抑える。また、平野部の地盤は通常地下水が地表近くにあり、そのままでは掘れないため、前もって鋼矢板や鉄筋コンクリートの連続地中壁で囲んだ内側の部分の地下水をポンプで吸い上げて、予定の深さまで地下水位を下げってから掘削を開始する。一方この掘削部分の外側では地下水位がなるべく変動しないようにする事が重要で、過密な都市部では地下水位が低下すると隣のビルの沈下など思わぬ影響が生じる場合がある。そのためにも、工事の期間中、地下水位を一定に保つためにポンプで汲み上げた水は再び、近くの地盤中に戻して循環させるような一般には知られていないような工夫が行われている。

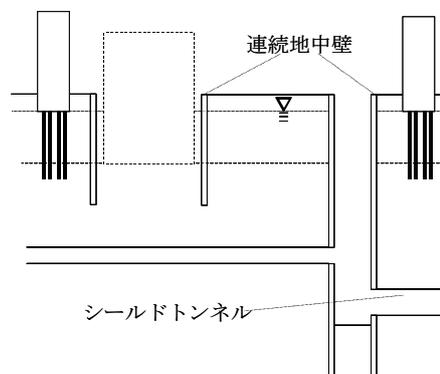


図 1.2 地下掘削・地下構造物の建設

また、地盤中に地下鉄、地下道路、エネルギー・通信用洞道、上下水道幹線、地下河川など線状構造物を建設する場合、前述のように地表から掘削する場合もあるが、地表から深い場合には、シールドトンネル掘削機械を使って、距離の離れた2つの縦坑間を自己掘進する方法が一般的である。このような地下掘削工事で出てくる土の処分や再利用も地盤工学の大きな課題である。

### (3)地盤中の水の動きの把握 (図 1.3)

(2)の地下掘削の場合でも重要であった地盤中の水の動きはそれ以外の多くの問題にも関わる極めて重要な問題である。例えば、ダム基礎地盤中を水はごくゆっくりした速度で少量ずつ漏水していく。また、土や岩を盛り立てて造るフィルダムではダムの本体中を水が少量ずつ漏水する。漏水はあまり大量でない限り大きな問題ではないが、水の流れにより土が内部侵食(パイピングと呼ぶ)を受けてダムの崩壊にいたることがある。また、水の流れがダムに揚水圧を及ぼし、安定性を減少させることもある。

さらに、地下掘削現場で深く掘削した地盤に連続地中壁の底部から周辺の高い地下水の水圧が働くと、地盤が有効応力を失って瞬時に破壊するボイリング現象や徐々に膨れ上がるヒービング現象を起こすことがある。

一方、環境問題に関して、廃棄物処分場の建設と運用・管理が地域社会の大きな問題となっている。廃棄物処分場において有害物質の周辺環境への流出を防止するためには、雨水から地下水への飽和土のみでなく不飽和土も含めた土中の水の流れをつかみ、防止策を打つ必要がある。

### (4)土質材料で構造物を造る (図 1.3)

地盤を構成する土質材料は自然から与えられたものであるが、それを建設材料として巧みに利用し土構造物を建設することも地盤工学の重要な課題である。道路や鉄道、空港の盛土は上に載る荷重の支持力を確保することが最重要であり、フィルダムの堤体は水を遮水する事が最重要である。いずれの場合も手近で大量に得られる材料を用いて必要な支持力や遮水性を得るために、土質材料の選定、含水比の管理、締め固め法の選定がされる。最近では土質材料をほかの材料を用いて補強することにより格段に強く変形しにくい土構造物を造る補強土技術が急速に普及してきた。

また、自然の地盤を改良することにより、支持力や硬さを増強した地盤改良が多く行われるようになり、この分野の技術進歩が著しい。特に地震対策としての地盤改良が多く行われている。このような地盤改良の分野で多くの専門技術者が活躍している。

### (5)地盤の防災 (図 1.4)

自然災害は地盤工学と深く関わっている。まず、地震災害については、そのあらゆる面で地盤工学が深く関わっている。まず、地震波は地盤を通して伝わってくるため、その地域の地盤の性質によって地震の揺れ方や大きさがかなり異なる。つまり、構造物の耐震設計を考える場合、地盤条件が大きな影響要因となる。また、地震動が大きくなるといろいろな形の地盤の破壊現象が現れるようになる。地下水以下の緩い砂地盤は液状化現象を起こし、支持力を失って構造物の沈下や埋設物の浮き上がり、側方への流動を引き起こす可能性がある。さらに、

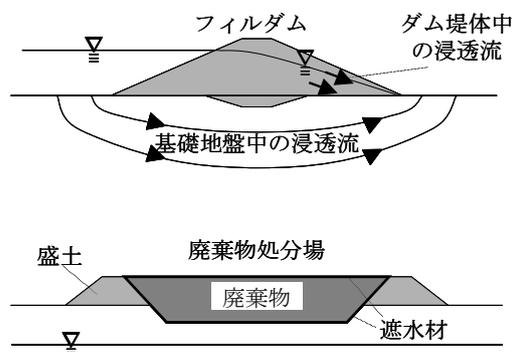


図 1.3 フィルダム・廃棄物処分場地盤での水の動き

自然斜面や盛土斜面は地震慣性力の影響と、場合によっては地盤材料の強度が地震で低下することによって崩壊する可能性がある。

次に、豪雨による土砂災害で毎年多くの被害を出しているが、斜面崩壊・土石流・泥流など地盤工学が他の分野と協力して事前予知・防災技術を進展させる余地が多い。また、地滑りは必ずしも豪雨と直接は結びついていない場合もあるが、類似の問題として取り組んでいく必要がある。

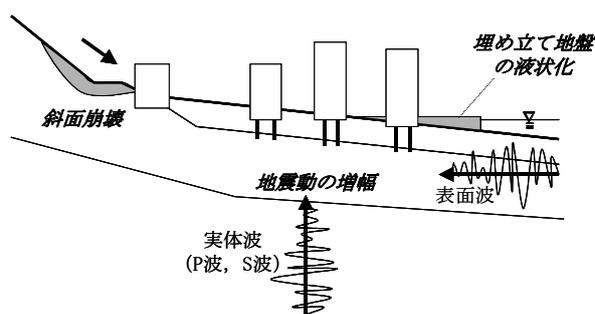


図 1.4 地盤中の地震動の増幅・液状化・斜面崩壊などの地盤災害

## (6)地盤環境の確保

社会の静脈部分を支えているのが資源リサイクルと廃棄物処分であるが、地盤工学はこれらの問題に深く関わっている。社会が発生する様々な副産物やごみを再生資源として土構造物や道路・建設材料などにリサイクル利用をはかる技術開発が進んでいる。特に大量に発生する掘削発生土、コンクリート廃材、アスファルト廃材、石炭灰、鉄鋼スラグなどの産業廃棄物の有効活用は地盤工学の大きな課題である。

また、リサイクル使用の難しい有害物質などを周辺環境から遮断して安全に処分する場所は当然地盤中に求められ、遮水層の設置、地中の水の流れの解析など地盤工学の技術が鍵となる。さらに最近では工場から漏れだした有害物質などによる土質汚染、地下水汚染がしばしば発生し、その除染や無害化技術が大きな事業となり、この面での地盤工学の発展も著しい。

## 1.2 地盤工学の特徴

金属材料やコンクリートなどにより自動車・航空機、橋や建築物などを造る工学とは異なり、地盤工学は基本的に自然から与えられた土質材料が対象である。したがって、その性質は場所によっても大きく変化するだけでなく、同一場所であっても不均質が高い。地盤は三次元的に複雑に変化しているにも関わらず、それを透視してみることができないため、その把握は容易でない。地盤中には地下水が存在し、土粒子、水、空気、の3相体として土質材料の物理・化学・力学的性質が決まる。地下水位以下の水で飽和された土でも二相体である。土粒子はもともとはバラバラの粒であり、それが集まって土粒子骨格を形成する。その粒子間の隙間を水や空気が埋める。また、土粒子のサイズがシルトや粘土のように数十マイクロン以下になると、土粒子表面と間隙水の間で電気化学的性質が卓越し始め、粘着力が生じる原因となる。この多様性が地盤の工学的性質を一見複雑にし、取り付きにくい印象を与えている。

このように、地盤工学においては人間がコントロールできる部分の少ない複雑な自然材料を人間のための材料として利用しようとするため、単純な統一的理論にはのりにくく、個別の地盤ごとに独自に技術課題を解決していく努力が重要である。そのため、地盤工学は建設現場においてもっとも必要とされるものであり、建設コストに大きな影響を及ぼす要因でもある。

土質力学はこの地盤工学の根幹をなし、その理解のために不可欠な学問である。

### 1.3 土質力学の3つのキーワード（有効応力，排水・非排水，ダイレイタンスー）

土質材料は土粒子の集合（粒子骨格）とその間隙を占める水・空気からなる．そのために，その力学特性には金属やコンクリートなどほかの建設材料と異なった特異な性質が表れる．それらは以下の3つのキーワードで代表される．

**有効応力**：( Effective stress ) ( = 全応力 ( Total stress ) - 間隙水圧 ( Pore-pressure ) )

**排水・非排水条件**：( Drained / Undrained condition )

**ダイレイタンスー**：( Dilatancy )

上の二つのキーワードはこの章および圧密の章で，ダイレイタンスーはせん断の章で述べることになる．

### 1.4 有効応力の考え方

**飽和地盤**の土は土粒子の集合（**粒子骨格**）とその間隙を占める水（**間隙水**）からなる．上に載る構造物から鉛直荷重  $P$  を受けた地盤の要素を切り出して図 1.5(a)のように示す．この荷重  $P$  が土粒子と間隙水によりどのように分担されるかを考える．まず，平面  $A-A'$  が横切る土粒子の境界を通る適当なカーブ  $c$  を想定し，そこを境とした力の釣り合いを考える．土粒子が負担する力は粒子の接点間力として伝わるが， $i$  番目の接点の接点力を同図(c)のように  $F_i$  とし，その鉛直分力と水平分力をそれぞれ  $N_i$ ， $H_i$  とする．そのうち鉛直荷重  $P$  を負担する鉛直分力  $N$  のみを考え，カーブ  $c$  に沿った土粒子の接点の数  $k$  だけの総和をとる．一方，カーブ  $c$  に沿って同図(b)のように**間隙水圧**  $u$  が作用しており，それも鉛直荷重  $P$  との釣り合いに関わっている．結局，カーブ  $c$  での力の釣り合い条件は  $A-A'$  の面積を  $S$  とすると，

$$P = \sum_{i=1}^k N_i + uS \quad (1.1)$$

と表され，両辺を  $S$  で除すことにより次式が得られる．

$$P/S = \sum_{i=1}^k N_i / S + u \quad (1.2)$$

ここで， $\sigma = P/S$ ， $\sigma' = \sum_{i=1}^k N_i / S$  と表すと，

$$\sigma = \sigma' + u \quad (1.3)$$

となる．ここに， $\sigma = P/S$  は外部からの荷重を面積で除した値で**全応力** ( total stress ) とよばれ，

$\sigma' = \sum_{i=1}^k N_i / S$  は土粒子が接点間力として受け持つ鉛直荷重を面積  $S$  で平均した値で**有効応力** ( effective stress ) と

呼ばれる．式(1.3)は，土に加わる外部荷重による全応力  $\sigma$  は土粒子が受け持つ有効応力  $\sigma'$  と間隙水圧  $u$  の和で受け持たれることを意味している．これは，土質力学の最も基本的な「**テルツァギの有効応力原理**」と呼ばれるもので，土の力学の基本となる重要な式である．また，式(1.3)を増分形式で表した次式も当然成り立つ．

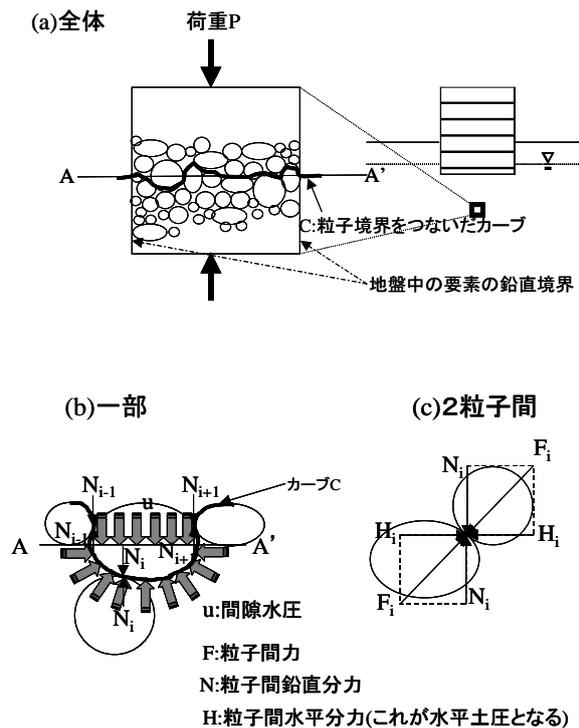


図 1.5 地盤中の土粒子間の力の釣り合い

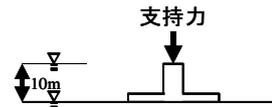
$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (1.3')$$

あとからも繰り返し述べるように、土の強度や変形のし易さは土粒子間の力、すなわち有効応力  $\sigma'$  で決まるのであり、それは間隙水圧  $u$  や全応力  $\sigma$  から式(1.3)により導かれる。

土の強度・変形特性はなぜ有効応力で決まるか？

土は礫、砂からシルト、粘土にいたるまで土粒子の集合でできている。粒子の集合としての強度や硬さがすなわち土の強度や硬さである。個々の粒子の強度や硬さは集合としてのそれらに比べはるかに大きいので土の強度や硬さは粒子の接触点での強度や硬さで決まることになる。接触点での強度や硬さを決定するのはそこに働いている接触点間の力であり、それは図 1.5 や式(1.2)から明らかのように有効応力で表される。間隙水圧は粒子の周面から均等に加わり、粒子の体積を変化させる（個々の粒子は硬いのでこの体積変化は無視しうる）が、接触点間の力には無関係である。したがって、後に第3章「せん断」のところで述べるように間隙水圧の変化が有効応力の変化を引き起こさないかぎり、間隙水圧は土の強度・変形特性とは無関係である。ゆえに、クイズ 1.1 のように同じ水底の地盤を考えた場合、水深に関わりなく、地盤の強度・変形特性は同一である。

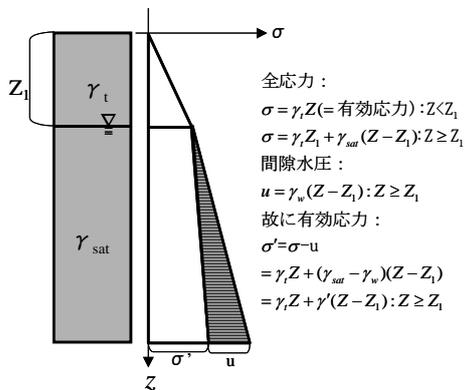
クイズ 1.1 : 図に示す基礎について、水位が地面に一致している場合と地面から 10m あがった場合で基礎の支持力が変化するかどうかを有効応力の見方で考察せよ。



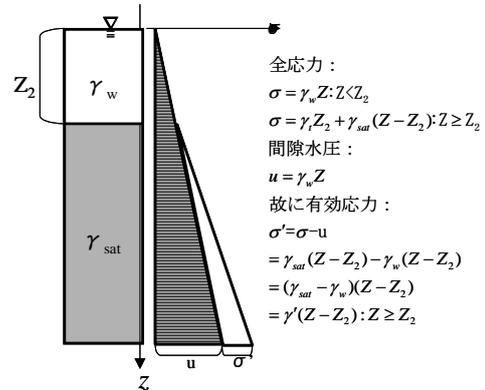
クイズ 1.1 図

演習 1.1 地盤中の有効鉛直応力の計算

(a) 地下水が地表より低い場合



(b) 地下水が地表より高い場合



(a)地下水が地表より低い場合

全応力： $\sigma = \gamma_t z$  (=有効応力)： $z < z_1$

$$\sigma = \gamma_t z_1 + \gamma_{sat}(z - z_1) \quad : \quad z \geq z_1$$

間隙水圧： $u = \gamma_w(z - z_1)$   $: z \geq z_1$

したがって、有効応力は

$$\sigma' = \sigma - u = \gamma_t z + (\gamma_{sat} - \gamma_w)(z - z_1) = \gamma_t z + \gamma'(z - z_1) \quad : \quad z \geq z_1$$

(b)地下水が地表より高い場合全応力： $\sigma = \gamma_w z$  (=有効応力)： $z < z_2$

$$\sigma = \gamma_w z_2 + \gamma_{sat}(z - z_2) \quad : \quad z \geq z_2$$

間隙水圧： $u = \gamma_w z$

したがって、有効応力は

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma - u = \gamma_{sat}(z - z_2) - \gamma_w(z - z_2) = (\gamma_{sat} - \gamma_w)(z - z_2) \\ &= \gamma'(z - z_2) \end{aligned} \quad : \quad z \geq z_2$$

---

—単位のおさらい—

質量： $M$  {SI 単位： $t, Kg, g$ }

密度： $\rho_t$  (不飽和土密度),  $\rho_{sat}$  (飽和土密度),  $\rho_w$  (水の密度)

{SI 単位： $t/m^3, g/cm^3$ }

重量 (力)： $Mg$  {SI 単位： $N, kN$ } [従来単位  $kgf, tf$ ]

$$1 \text{ tf} = 1 \text{ t} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ kN}$$

単位体積重量： $\gamma_t$  (不飽和土重量),  $\gamma_{sat}$  (飽和土重量),  $\gamma_w$  (水の重量)

$$\gamma' \text{ (土の水中重量)} = \gamma_{sat} - \gamma_w$$

{SI 単位： $kN/m^3, N/m^3$ } [従来単位  $tf/m^3, gf/cm^3$ ]

$$1 \text{ tf/m}^3 = 1 \text{ t} \times 9.8 \text{ m/s}^2 / \text{m}^3 = 9.8 \text{ kN/m}^3$$

{SI 単位： $kN/m^3, N/m^3$ } [従来単位  $tf/m^3, gf/cm^3$ ]

応力 (圧力)： $\sigma$  (直応力),  $\tau$  (せん断応力),  $p$  (圧力),  $u$  (間隙水圧)

{SI 単位： $kN/m^2 = kPa, N/m^2 = Pa$ }

[従来単位  $tf/m^2, kgf/cm^2$ ]

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 10 \text{ tf/m}^2 = 98 \text{ kN/m}^2 = 98 \text{ kPa}$$


---

### 1.5 地盤工学のための弾性定数

地盤を等方弾性体と仮定する場合は多いため、弾性体力学の基礎的知識をここで確認しておく。

なお通常、弾性体力学では引張応力を正とするが、地盤工学では圧縮を正とするため注意が必要である。

図 1.6(a)のように1次元で弾性体を圧縮したときの直応力  $\sigma$  とその方向の直ひずみ(軸ひずみとも言う)  $\varepsilon$  の間に、次の関係がある。

$$E = \sigma / \varepsilon \quad (1.4)$$

$E$  は **変形係数 (金属でのヤング係数)** とよばれ、直応力  $\sigma$  と直ひずみ  $\varepsilon$  の比である。

また、応力  $\sigma$  の载荷方向と直角方向に生じるひずみ  $\varepsilon'$  と  $\varepsilon$  の比により、**ポアソン比  $\nu$**  が定義される。

$$\nu = -\varepsilon' / \varepsilon \quad (1.5)$$

ここに、 $\varepsilon$  と  $\varepsilon'$  は符号が異なるため、ポアソン比を正值にするためマイナスをつけている。

図 1.6(b)のように弾性体の表面にせん断応力  $\tau$  を加えるとせん断ひずみ  $\gamma$  が生じるが、両者の間には次式が成り立つ。

$$G = \tau / \gamma \quad (1.6)$$

$G$  は **せん断剛性 (せん断弾性定数)** とよばれ、変形係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  により次式で表される。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6')$$

図 1.7 のように、弾性体に3方向から直応力が加わるときの各方向の直ひずみは、それぞれの応力の影響が重ね合わされると考え、式(1.4)と式(1.5)を使うと、次のように表されることが分かる。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \quad (1.7)$$

一方、各方向のせん断ひずみについては、次のようにそれぞれ独立で表される。

$$\gamma_{12} = \tau_{12} / G, \quad \gamma_{23} = \tau_{23} / G, \quad \gamma_{31} = \tau_{31} / G \quad (1.8)$$

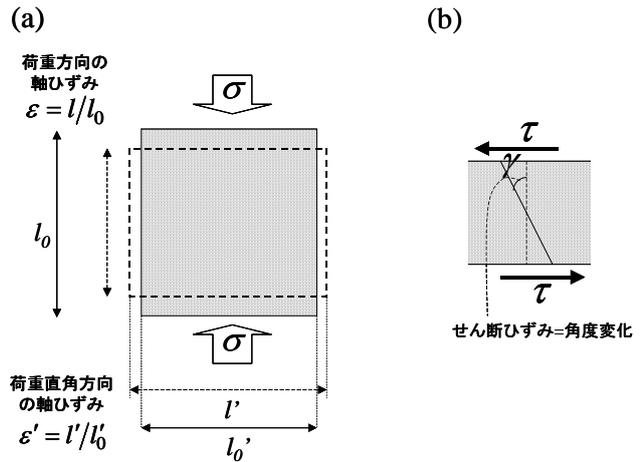


図 1.6 1次元直応力(a)とせん断応力(b)による変形

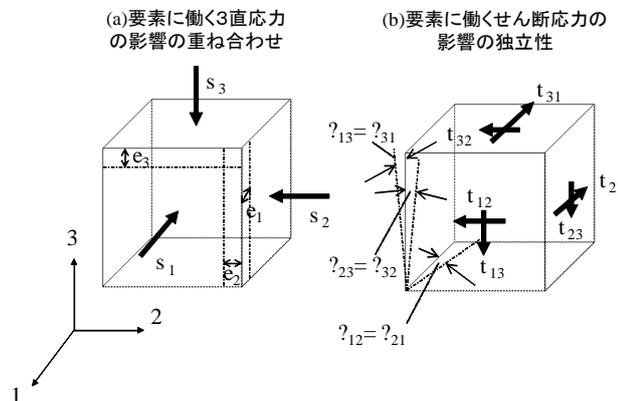


図 1.7 3方向の直応力(a)とせん断応力(b)による変形

## 1.6 弾性地盤中の水平応力

地盤を弾性体と仮定して、図 1.8 に示すような地盤のある深さの立方体の要素を考える。 $\sigma_1$  を上の地盤の重量による鉛直応力、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  を水平方向に働く土圧とすると、各方向の直ひずみは式(1.7)で表される。  $E$  と  $\nu$  は地盤を **等方弾性体**とした場合の **変形係数** (弾性体力学でのヤング係数) と **ポアソン比**である。

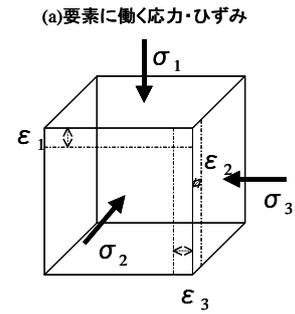
自然地盤では鉛直応力 (鉛直土圧) は  $\sigma_v = \sigma_1$ 、水平応力 (水平土圧) は  $\sigma_h = \sigma_2 = \sigma_3$  と考えられるので、水平方向のひずみ  $\varepsilon_h = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$  は

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E} \{ \sigma_h - \nu(\sigma_v + \sigma_h) \} \quad (1.9)$$

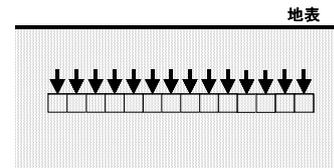
自然地盤が安定状態にあれば、地盤のどの隣り合う要素どうしても図 1.8 に示すように条件は全く同じため、隣との境界は変形できない。したがって、 $\varepsilon_h = 0$  でなければならない、

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_v} = \frac{\nu}{1-\nu} \equiv K_0 \quad (1.10)$$

が成り立つ。ここで、 $K_0$  のことを **静止土圧係数**と呼ぶ。



(a)要素に働く応力・ひずみ



(b)地盤中の隣り合う要素

図 1.8 地盤中の立方体要素が受ける応力とひずみ

## 1.7 排水・非排水条件と水平土圧

土が外からの荷重により縮もうとするとき、粘土のような粒子の細かい土は透水性が小さいため、土粒子の間隙を満たしている水が外に出ようとしても間隙水は短時間には移動できない。すなわち荷重の加わる速度に対して土の透水性が小さく間隙水の排水効果が無視できる場合、これを **非排水条件**であると言う。

土粒子は硬く非圧縮性であるが、水も同じく非圧縮性と考えた方がよい。したがって非排水条件の場合、地下水以下で完全に水で飽和している粘土地盤は短時間では非圧縮性であり、**非圧縮性物体**のポアソン比は  $\nu = 0.5$  となる (クイズ 1.2)。その場合、式 (1.10) より  $K_0 = \sigma_h / \sigma_v = 1.0$  となり、 $\sigma_h = \sigma_v$  すなわち、水平方向と鉛直方向の圧力が等しくなる。これは液体中では一般に成り立つことであり、飽和粘土地盤は短時間にかかる荷重の増加分に対しては液体と同様な振舞いをするといえる。

---

クイズ 1.2 : 非圧縮性物体のポアソン比が  $\nu = 0.5$  となることを弾性論により説明せよ。

---

一方、自然地盤は何千年以上の長い期間をかけて堆積する。その間、地盤にはごくゆっくりした速度で上載土の荷重が増加していくが、粘土のような水の通しにくい地盤でもこのくらいの長期間であれば十分水の移動が可能である。このような場合、これを **排水条件**と呼ぶ。すなわち同じ土でも荷重が加わる速度と排水時間との相対的大小によって、排水条件から非排水条件に変化する。砂地盤や礫地盤の場合には短時間で水が移動できるため

通常は排水条件であるが、地震のように短い現象に対しては非排水条件が当てはまる場合もある（→液化現象）。

排水条件下での静止土圧係数は有効応力による土粒子骨格本来の性質や以前に加わった荷重の履歴などから決まるものである。それは、土の試料の室内試験から求めることが多く、その値として正規圧密土（第2章参照）では  $K_0 = 0.4 \sim 0.5$  程度がよく使われる。これはポアソン比にして  $\nu = 0.29 \sim 0.33$  に対応している。

以上より、静止土圧係数  $K_0$  は鉛直荷重増分が

排水状態で加わる場合は： $K_0 = \sigma'_h / \sigma'_v = 0.4 \sim 0.5$ （正規圧密土の場合）

$K_0 = \sigma'_h / \sigma'_v = 0.5 \sim 1.0$  以上（過圧密土の場合）

非排水状態で加わる場合は： $K_0^* = \sigma_h / \sigma_v = 1.0$

をとることになる。ここで、静止土圧係数  $K_0$  を用いて、地盤の鉛直・水平応力を表してみよう。たとえば、図 1.9 のような地盤について考えると、図中の式によって表せる。ただし、この場合の  $K_0$  は排水状態に当たる  $K_0 = 0.4 \sim 0.5$  の値をとることになる。

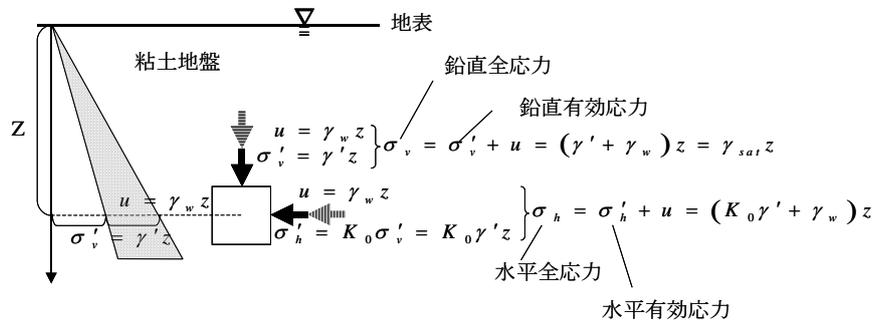


図 1.9 自然のままの粘土地盤中の鉛直・水平応力（土圧）分布

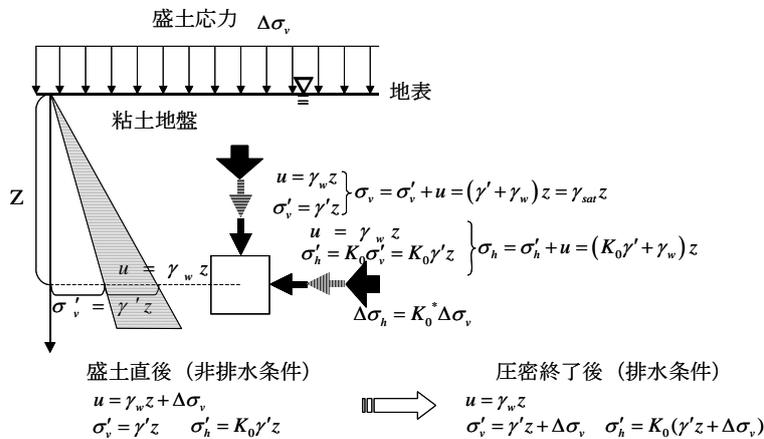


図 1.10 盛土による粘土地盤中の鉛直・水平応力（土圧）分布

次に、この地盤の地表に図 1.10 のように盛土の応力の増加分  $\Delta\sigma_v$  をかけた場合を考えよう。盛土は遅くとも数年の工事期間で完成するので、粘土地盤にとって非排水条件となるため、この場合の静止土圧係数を  $K_0^*$  で表すと、 $K_0^* = 1.0$  となり、盛土による増分応力は鉛直・水平方向で等しく、 $\Delta\sigma_h = \Delta\sigma_v$  となる。ただしこの増分応力は全応力であり、すべて間隙水圧の増加により負担され、有効応力の増加はない。すなわち、 $\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u$  の内  $\Delta\sigma = \Delta u$  であり、 $\Delta\sigma' = 0$  である。

この間隙水圧は周辺の盛土の無いところの自然の間隙水圧に比べると高くなっているため、盛土完成後長期間かけて上方や周辺への排水が生じ（排水条件）、それに伴って  $\Delta u \rightarrow 0$ 、 $\Delta\sigma' \rightarrow \Delta\sigma$  の変化がゆっくりと生じる。これが、次の章で述べる圧密現象である。圧密によって間隙水が移動して体積収縮が生じ有効応力が増加するため、地盤の長期沈下が生じることになる。

したがって、盛土直後の応力状態は

$$\begin{aligned} \text{全応力;} \quad \sigma_v &= \sigma'_v + u + \Delta\sigma_v = (\gamma' + \gamma_w)z + \Delta\sigma_v = \gamma_{sat}z + \Delta\sigma_v \\ \sigma_h &= \sigma'_h + u + \Delta\sigma_h = \sigma'_h + u + K_0^* \Delta\sigma_v = (K_0\gamma' + \gamma_w)z + \Delta\sigma_v \\ \text{間隙水圧;} \quad u &= \gamma_w z + \Delta\sigma_v \\ \text{有効応力;} \quad \sigma'_v &= \gamma' z \\ \sigma'_h &= K_0\gamma' z \end{aligned}$$

となり、有効応力は盛土前と変わらない。圧密が終了すると、盛土応力  $\Delta\sigma_v$  が過剰間隙水圧から有効応力に置き換わるため、全応力は変わらないが、

$$\begin{aligned} \text{間隙水圧;} \quad u &= \gamma_w z \\ \text{有効応力;} \quad \sigma'_v &= \gamma' z + \Delta\sigma_v \\ \sigma'_h &= K_0\gamma' z + \Delta\sigma_h = K_0\gamma' z + K_0\Delta\sigma_v = K_0(\gamma' z + \Delta\sigma_v) \end{aligned}$$

と変わる。なぜ、上記のように非排水条件では増分応力がすべて間隙水圧に置き換わるかの理由は、飽和土を土粒子と間隙水からなる次のようなモデルに置き換えて式を組み立てることにより理解できる。

### 1.8 等方応力増分による間隙水圧変化

土が非排水状態であることを表すために、図 1.11 のように水で完全に飽和された土の周りがゴム膜で覆われていると考える。その状態で、ゴムの外側から鉛直・水平方向に大きさの同じ全応力増分（等方全応力増分） $\Delta\sigma$  を加える。これに対して内側では有効応力増分  $\Delta\sigma'$  と間隙水圧増分  $\Delta u$  により釣り合いを保つことになる。すなわち、

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (1.3)$$

が常に成り立たなければならない。

この応力変化に対する土粒子骨格、間隙水、土粒子自身の体積変化は以下の式で表すことができる。

$$\text{有効応力変化 } \Delta\sigma' \text{ による土粒子骨格の体積変化 (} K_s \text{ : 土粒子骨格の体積弾性率) } \Delta V_s = \frac{\Delta\sigma'}{K_s} V \quad (1.11)$$

$$\text{水圧変化 } \Delta u \text{ による間隙水の体積変化 (} K_w \text{ : 間隙水の体積弾性率) } \Delta V_w = \frac{\Delta u}{K_w} nV \quad (1.12)$$

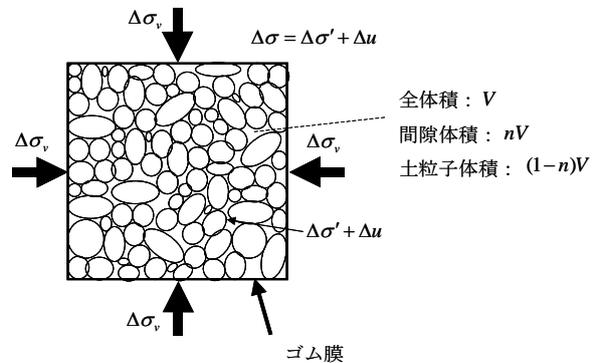


図 1.11 ゴム膜で覆われ飽和土に等方応力が加わった時の内部応力状態を考えるモデル

水圧変化  $\Delta u$  と有効応力変化  $\Delta\sigma'$  による土粒子自身の体積変化 ( $K_{sp}$  : 土粒子自身の体積弾性率)

$$\Delta V_{sp} = \frac{\Delta u}{K_{sp}}(1-n)V + \frac{\Delta\sigma'}{K_{sp}(1-n)}(1-n)V = \frac{(1-n)\Delta u + \Delta\sigma' V}{K_{sp}} \quad (1.13)$$

ここで、ゴム膜を通しての物質の移動は無いことから、次式が成り立つことが分かる。

$$\Delta V_s \text{ (土粒子骨格の体積変化)} = \Delta V_w \text{ (間隙水の体積変化)} + \Delta V_{sp} \text{ (土粒子自身の体積変化)} \quad (1.14)$$

したがって、

$$\left( \frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_{sp}} \right) \Delta\sigma' = \left( \frac{n}{K_w} - \frac{1-n}{K_{sp}} \right) \Delta u \quad (1.15)$$

式(1.3')より  $\Delta\sigma' = \Delta\sigma - \Delta u$  であるので、これを上式に代入してまとめると

結局、次式が得られる。

$$B \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma} = \frac{\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_{sp}}}{\frac{1}{K_s} + \frac{n}{K_w} - \frac{n}{K_{sp}}} \quad (1.16)$$

ここに、 $B = \Delta u / \Delta\sigma$  を **間隙水圧係数B値** とよび、外から加わる全応力の内の間隙水圧に置き換えられる割合を表している。ここでこのB値の式に含まれる3種類の体積弾性率を比較すると、土粒子骨格は水や土粒子自身に比べてはるかに圧縮しやすい、すなわち体積弾性率が低く、 $K_s \ll K_w, K_{sp}$  であるため、結局、 $B = \Delta u / \Delta\sigma = 1.0$  となることが分かる。すなわち、非排水条件で外部から等方応力が加わると、それはほぼ 100% 間隙水圧に置き換わるわけである。

これを、お祭りで売っているゴムヨーヨーにとれたのが図 1.12 である。飽和砂で充満したヨーヨーに周りから満遍なく力(全応力  $\Delta\sigma$ ) をかけることを想定すると、それは乾燥砂で充満したヨーヨーに有効応力  $\Delta\sigma'$  をかけることと、水のみを満たしたヨーヨーに間隙水圧  $\Delta u$  をかけることに分けて考えることができる。乾燥砂に有効応力をかけると砂は縮もうとするが、一方、水に間隙水圧  $\Delta u$  を加えても **水の非圧縮性** により非常に縮みにくいことは当然理解できる。実際は乾燥砂と水は同じ体積のヨーヨーに入っており、水の非圧縮性によって体積はほとんど縮めない。したがって、体積が縮まなければ有効応力は発揮できず、間隙水圧が外からの力(全応力  $\Delta\sigma$ ) のほぼ 100% を負担することになる。

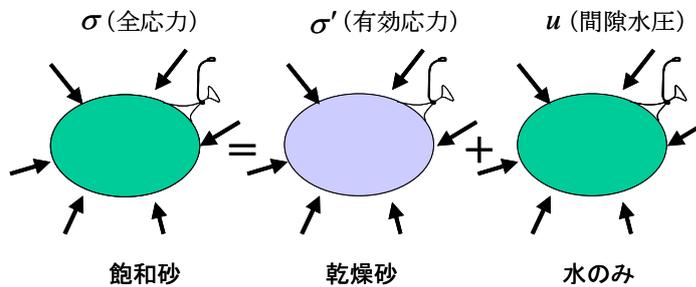


図 1.12 ヨーヨーによる全応力の有効応力と間隙水圧による分担

## 2 地盤の圧密

### 2.1 圧密とは

圧密と圧縮は類似の意味を持つが、一般に以下のように使い分けている。

- ・ **圧密(Consolidation)** : 上載荷重による、粘土・シルトのような低透水性の地盤での長期にわたる沈下
  - ・ **圧縮(Compression)** : 上載荷重による、砂・礫のような高透水性の地盤での瞬時に生じる沈下
- しかし、砂・礫についても圧密と呼ぶ場合もあり、その区分は明確ではない。

#### 排水・非排水条件と圧縮・圧密

地下水位以下の地盤は土粒子間の間隙が水で飽和されている。このような飽和地盤において構造物の建設により荷重が増加し、圧縮変形による地盤の沈下が生じることになる。そのためには粒子間隙が小さくなることが必要であり（土粒子自身や水は体積が収縮しにくいことはすでに述べた）、間隙を満たしている水の一部がほかに移動する必要がある。砂や礫の地盤では透水性が高いため、構造物の建設による荷重の増加速度に対して移動が十分可能で、いわゆる「**排水条件(Drained condition)**」であり、圧縮による地盤沈下はごく短期間で終了する。それに対し、粘土地盤においては透水性が低いためいわゆる「**非排水条件(Undrained condition)**」であり、前章で述べたように荷重の増加による間隙水圧の上昇が生じる。この場合、低い透水性によって間隙水の移動はきわめてゆっくり生じ、それとともに間隙水圧は低下し有効応力が増加するため、圧縮による地盤沈下が構造物完成後も長期間継続する。これを圧密と呼ぶ。

すなわち、**図 2.1** に示すように、初期に (a) のような有効応力分布の地盤に上載荷重  $\Delta\sigma$  が加わると、粘土はほぼ非排水状態であるため、同図 (b) のように有効応力  $\Delta\sigma' = 0$  で、第 1 章で学んだ有効応力原理の式 (1.3')

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (1.3' \text{再})$$

に基づいて、全応力増分  $\Delta\sigma$  はすべて水圧上昇  $\Delta u$  が負担する。この水圧上昇分を **過剰間隙水圧(Excess pore pressure)** とよぶ。そして時間とともに過剰間隙水圧は周囲に消散し、 $\Delta u = 0$  となるため、同図 (c) では全応力増分は有効応力で負担されることになり、 $\Delta\sigma' = \Delta\sigma$  となる。

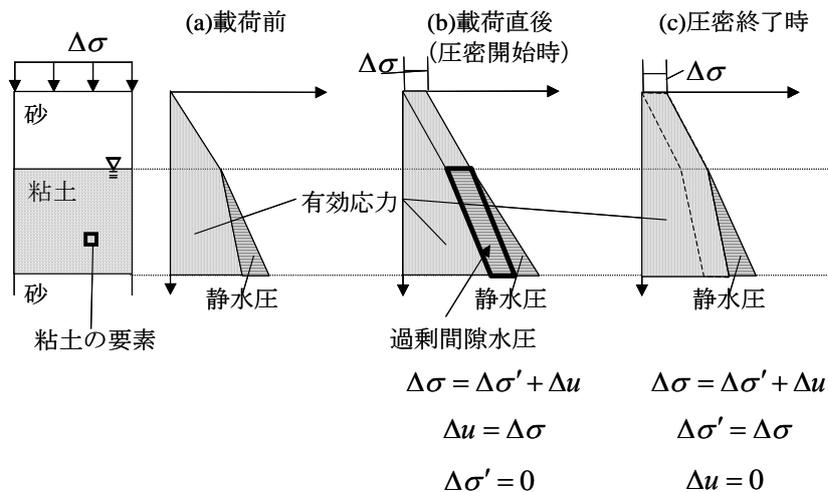


図 2.1 粘土地盤の圧密による各段階での有効応力と過剰間隙水圧の分布

図 2.1 に示す土の要素の応力状態の時間に対する変化は図 2.2 のように表される。

すなわち圧密とは、低透水性の地盤への上載荷重の短期間の（すなわち非排水条件での）荷重（全応力増分  $\Delta\sigma$ ）により発生した過剰間隙水圧  $\Delta u$  が長期間かけて消散する過程で、過剰間隙水圧  $\Delta u$  が有効応力  $\Delta\sigma'$  に置き代わり、それにともない沈下が生じる現象である。すなわち前章の式(1.3)を増分形で表した有効応力原理の式(1.3'再)にしたがい、長時間かかって  $\Delta u$  が  $\Delta\sigma'$  に移行し、有効応力が増加することにより粒子間の接点力が増加するため接触状態が変化して沈下が進むと解釈できる。

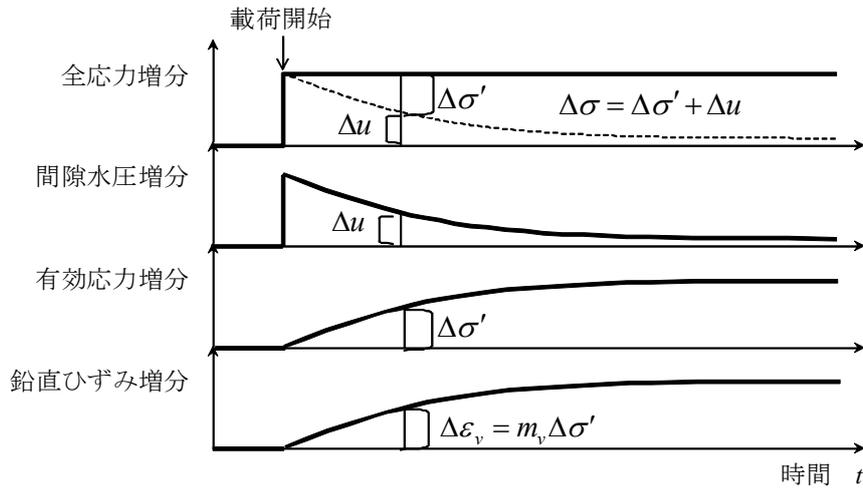


図 2.2 圧密による粘土の応力とひずみの時間変化

## 2.2 有効応力と鉛直ひずみの関係

図 2.3 に示すように、体積  $V$  の飽和土の要素を取り出して土粒子と間隙に分けて考えると、土粒子体積  $V_s$  と間隙体積  $V_e$  に分かれる。このうち、圧密により沈下が生じるのは、土粒子自身は非圧縮性と考えてよいので、間隙体積が減少するためである。

これを式で表すと、

間隙比： $e = V_e/V_s$

$$V = V_s + V_e = V_s \left( 1 + \frac{V_e}{V_s} \right) = V_s (1 + e) \quad (2.1)$$

であるから、体積  $V$  の変化が  $V_s$  によらず、 $V_e$  の変化つまり  $\Delta e = \Delta V_e/V_s$  の変化のみで起きることを考えると、

$$\Delta V = V_s \Delta e \quad (2.2)$$

したがって、鉛直ひずみは次式で表される。

$$\varepsilon_v = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{V_s \Delta e}{V_s (1 + e_0)} = -\frac{\Delta e}{1 + e_0} \quad (2.3)$$

ここに、 $e_0$  はひずみが生じる前の初期間隙比であり、また、圧縮ひずみを+とするためにマイナス符号がついている。

つぎに、図 2.4(a) のような水平地盤の中の土の要素を考

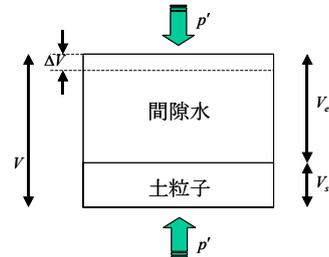


図 2.3 土の構成要素と体積

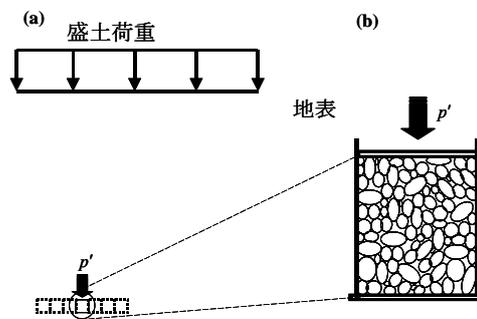


図 2.4 均等に圧密される土の要素と 1 次元沈下

え、側方を拘束した状態で鉛直に圧縮していくと、有効応力が大きくなるほど土は硬くなり、鉛直ひずみの増分は小さくなっていく。このことは図 2.4 (b) のように筒型の容器に乾燥砂（この場合、間隙水圧が発生しないので、全応力=有効応力）であり、直ちに沈下が起きる）を入れて押ししていくことを考えれば容易に理解できる。したがって、有効応力と鉛直ひずみの関係は図 2.5 (a) のようにグラフ上で下に凸のカーブとなる。

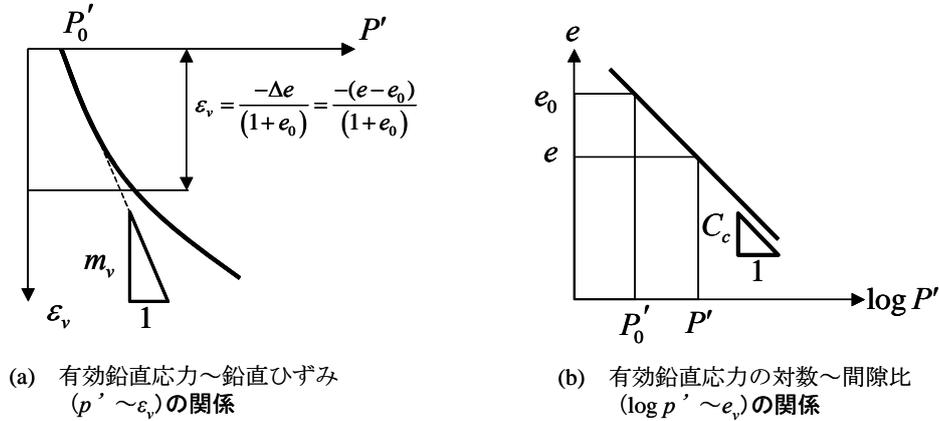


図 2.5 圧密での有効応力と沈下の表し方

図 2.5 (a) の曲線の勾配を基準の応力  $p'_0$  の位置で計算し、**体積圧縮係数**(Coefficient of volume compressibility)  $m_v$  を次式で定義する。

$$m_v = \left. \frac{d\varepsilon_v}{dp'} \right|_{p'=p'_0} = - \frac{1}{1+e_0} \left. \frac{de}{dp'} \right|_{p'=p'_0} \quad (2.4)$$

$m_v$  は応力増分に対するひずみの増分の割合であり、その逆数  $1/m_v$  は図 2.5 から理解できるように、弾性力学で登場する側方拘束状態での変形係数に当たる。 $p' \sim \varepsilon_v$  関係は曲線なので、 $m_v$  は基準にとる  $p'_0$  によって異なる値をとる。

一方、これの代わりに、片対数グラフ上に  $\log p' \sim \varepsilon_v$  関係 あるいは  $\log p' \sim e$  関係をとると図 2.5(b) のようにほぼ直線となることが経験的に知られている（あくまで近似的にであり、その厳密な理論的根拠は知られていない）。すなわち、 $\log p' \sim e$  関係を次式により表すことができる。

$$e - e_0 = -C_c \log(p'/p'_0) = -0.434 C_c \ln(p'/p'_0) \quad (2.5)$$

式中の  $C_c$  は**圧縮指数**とよばれる定数である。式(2.4), (2.5)を用いると、 $m_v$  と  $C_c$  とを関係づける次式が得られる。これより、圧縮指数  $C_c$  は定数であるが、 $m_v$  は  $p'_0$  に依存する値であることがわかる。

$$m_v = \left. \frac{d\varepsilon_v}{dp'} \right|_{p'=p'_0} = - \frac{1}{1+e_0} \left. \frac{de}{dp'} \right|_{p'=p'_0} = \frac{0.434}{(1+e_0)p'_0} C_c \quad (2.6)$$

### 2.3 正規圧密・過圧密

実際に、粘土を原地盤から図 2.6 (a) のように採取して圧密試験を行い片対数グラフで表すと、図 2.5 (b) のような直線関係とは異なり、図 2.6 (b) のような折れ線が得られる。この折れ曲がり点に対応する応力  $p'_c$  を**圧密降伏応力**または**先行圧密応力**と呼ぶ。先行圧密応力とは、土がかつて受けたことのある最大の応力で、そこで圧密曲線の勾配が明確に変化する。逆に、圧密曲線の折れ曲がり点を求めることにより土の過去に受けた最大応力がわかるわけで、土は**応力履歴**の記憶能力があると言える。

先行圧密応力を境目として、圧密状態を**正規圧密**(Normal consolidation)と**過圧密**(Over-consolidation)に区分する。片対数グラフ上で、正規圧密状態での圧密カーブの勾配を  $C_c$  (**圧縮指数**: Compression index), 過圧密状態での勾配を  $C_s$  (**膨潤指数**: Swelling index) で表す。また、次式により**過圧密比**(OCR: Over-Consolidation Ratio)を定義する。

$$\text{過圧密比} : OCR = p'_c / \sigma'_v \quad (2.7)$$

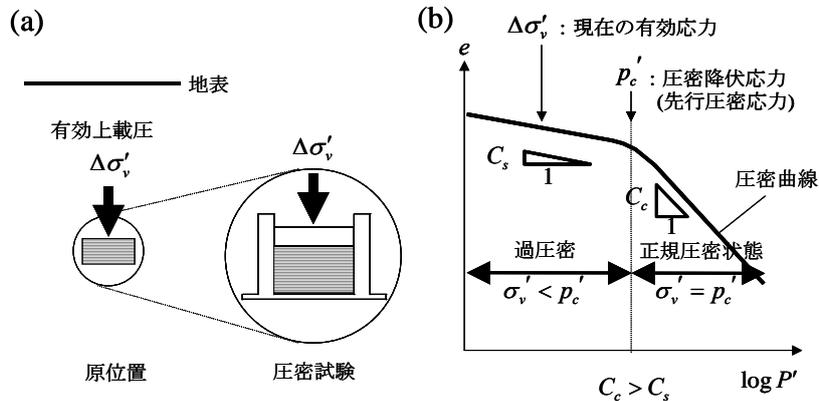


図 2.6 粘土の採取試料による圧密曲線と圧密降伏応力

すなわち、まとめて表すと、

**正規圧密状態とは**： $OCR = 1$ ，すなわち現在の $\sigma'_v$ と先行圧密応力が一致した状態で、現在以上の荷重を受けたことのない土。荷重を載せると勾配  $C_c$  に対応して沈下量が大きい。

**過圧密状態とは**： $\sigma'_v < p'_c$ ， $OCR > 1$ で現在の $\sigma'_v$ より先行圧密応力が大きく、かつて、現在以上の荷重をうけてその後、除荷された土。荷重を載せても、勾配  $C_s$  に対応して小さな沈下量しか生じない。

正規圧密状態の地盤から土を採取した場合でも、採取にともない一般に原地盤よりも応力が低下するため（全応力はゼロとなり、有効応力は後に 3.5(4)で述べるように間隙水圧が負になってある程度の原地盤より低い値に保たれるため）、圧密試験により図 2.6 のような折れ線があらわれる。この場合の折れ曲がり点の先行圧密応力  $p'_c$  は原地盤でその土の要素が受けていた応力の値を示している。しかし一般的には、土は過去に受けた長期の地質的履歴により、過圧密状態となっているものが多い。そのうち、特に典型的なのは、海底などで堆積した地盤が陸化によって上部が浸食されて過圧密となる場合である。

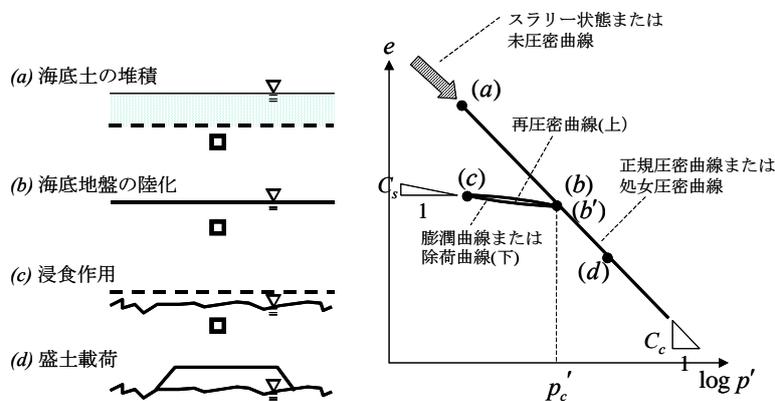


図 2.7 地盤の生成過程と圧密曲線の関係

図 2.7 は水中での堆積生成のち陸化し、その後、浸食を受けて削られた地盤の上に盛土を載せる場合の  $\log p' \sim e$  関係を表している。浸食によって応力が減る点 (b) から点 (c) までの過程を **除荷曲線**、そこから盛土によって再び増加する点 (c) から点 (b') までの過程を **再圧密曲線** とよぶ。すなわち点 (b) (c) 間は過圧密状態である。過圧密状態の地盤に荷重を載せると、荷重が小さい間は  $C_s < C_c$  なので沈下は小さいが、荷重が大きくなって先行圧密応力  $p'_c$  を越えると急激に沈下が進む現象が現れるので注意が必要である。

また、特に浸食を受けなくても、長い地質的時間経過により土の固結作用 (**属性作用**とも言う) がすすみ、あたかも現在よりも大きな荷重を受けたことがあるかのような過圧密とほぼ同様な状態となることが知られており、これを **疑似過圧密効果** と呼ぶ。

## 2.4 最終圧密沈下量の計算法

下図のような地盤に盛土荷重が加わった場合の沈下を考える。このうち一番下の泥岩層については十分硬いので沈下量は無視する。表面の砂層は透水性が良いので沈下は載荷後ただちに起きるが、その量は粘土層に比べて小さい。粘土層の圧密沈下量は大きく長時間かけて生じるが、ここではその最終的な沈下量の計算法について述べる。

図 2.8 のように、盛土載荷直後の粘土地盤の有効応力 (盛土載荷直前に等しい) を粘土層中心深さにおいて  $p'_0$  とし、盛土による応力を  $\Delta\sigma$  とすると、圧密終了後の同じ深さでの有効応力は  $p' = p'_0 + \Delta\sigma$  となる。したがって図 2.5 を参照して、次の二つの方法により圧密終了時沈下量  $S_\infty$  の計算ができることが分かる。

方法 1 : 図 2.5 (a) 参照

$$S_\infty = \varepsilon_v H = m_v (p' - p'_0) H \quad (2.8a)$$

ただし  $m_v$  : 体積圧縮係数を用い、 $p' \sim \varepsilon_v$  関係を微小区間では直線として計算。

方法 2 : 図 2.5 (b) 参照

$$S_\infty = \varepsilon_v H = \frac{-\Delta e}{1+e_0} H = \frac{e_0 - e}{1+e_0} H = \frac{C_c \log(p'/p'_0)}{1+e_0} H \quad (2.8b)$$

なぜなら式(2.5)より  $e = e_0 - C_c \log(p'/p'_0)$  ただし  $C_c$  : 圧縮指数。

除荷時の地盤の浮き上がり量と再載荷時の沈下量は式(2.7)の圧縮指数  $C_c$  を過圧密状態に対応した膨潤指数  $C_s$  に変えて計算すればよい。

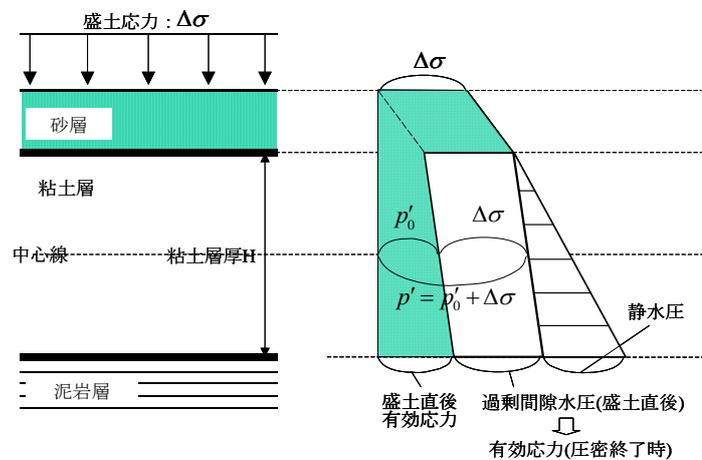


図 2.8 粘土層中の盛土直後と圧密終了後の応力状態

## 2.5 圧密の時間経過—圧密方程式—

前節では有効応力の変化にとまらぬ粘土層の最終沈下量の計算法について述べたが、飽和した粘土では地盤にかかる荷重が変化してもこのような体積変化が直ちに起こるわけではなく、変化に長時間がかかる。これは、粘土のような透水性の低い地盤では荷重直後に上昇した間隙水圧が消散し、その分有効応力が増加するためには間隙水の移動が必要であり、それに時間がかかるためである。この時間に対する変化を理論式で表してみる。

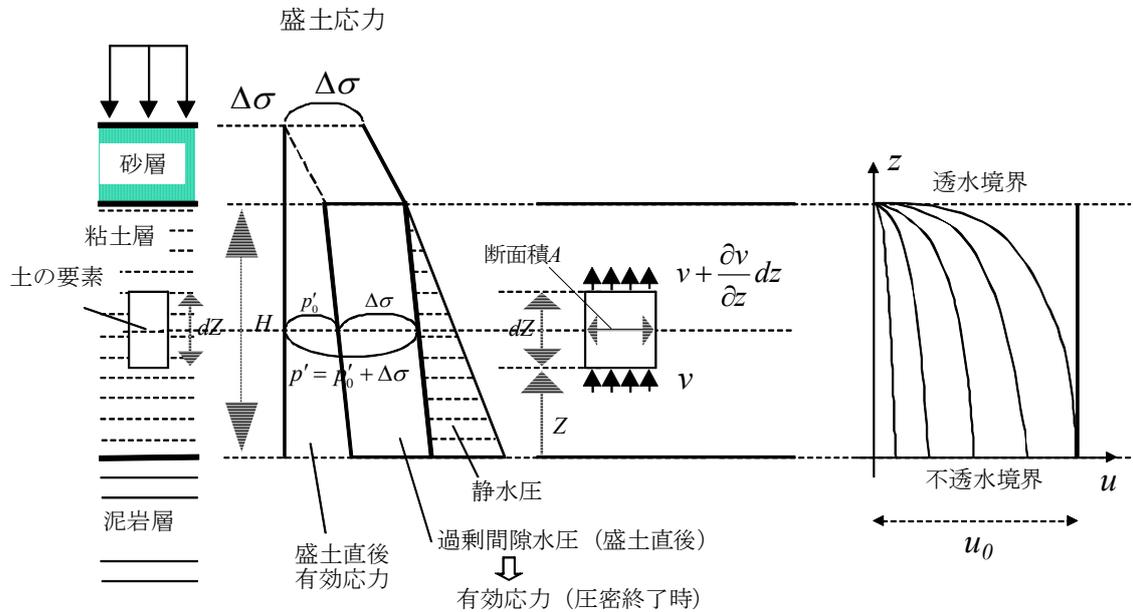


図 2.9 粘土層の 1 次元圧密方程式での間隙水の流れと境界条件

図 2.9 に示す厚さ  $dz$  の土の要素の体積の釣り合いを考える。鉛直方向の間隙水の流速を  $v$  とすると、

(a)  $dt$  時間内に要素から出入する水の量は

$$\left\{ \left( v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) - v \right\} A dt = A \frac{\partial v}{\partial z} dz dt \quad (2.9)$$

(b)  $dt$  時間内に要素の土粒子骨格の鉛直ひずみ  $\varepsilon_v$  の変化により生じる体積変化 (圧縮ひずみを + とする)

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} A dz dt \quad (2.9a)$$

で表されるが、両者が等量であることすなわち (a)=(b) であることより、次式が得られる。

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.9b)$$

流速  $v$  はダルシーの式により、流速  $v$  は次式で表される。

$$v = ki = -k \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.10)$$

ダルシーの式については 5 章の地盤中の水の流いで学ぶが、図 2.10 のように地盤中を層流状態で流れるゆっくりした水流に適用される。

$$\text{動水勾配} : i = -\frac{\Delta h}{\Delta s}$$

(マイナス記号は  $\Delta s \rightarrow +$  の時,  $\Delta h \rightarrow -$  であるので,  $i$  を正数とするためにつける)

ここに 流速 :  $v$  透水係数 :  $k$  水頭 :  $h$   
透水距離 :  $s$  である.

また土を線形弾性体とした場合, 式(2.2)の体積圧縮係数  $m_v$  の定義と式(1.3)の有効応力の定義に基づき, 鉛直ひずみ  $\varepsilon_v$  は, 鉛直有効応力  $\sigma'_v$  または間隙水圧  $u$ , 全応力  $\sigma_v$ , あるいは盛土直後の間隙水圧  $u_0 (= \sigma_v)$  を用いて

$$\varepsilon_v = m_v \sigma'_v = m_v (\sigma_v - u) \quad \sigma_v = \text{const.} \quad (2.11)$$

と表せるので, 式 (2.10) (2.11) を式 (2.9) に代入して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{m_v \gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{または,} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad C_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \quad (2.12)$$

これは **テルツァギの圧密方程式** と呼ばれる. ここに  $C_v$  は **圧密係数** (Coefficient of consolidation) と呼ばれる定数で, 面積/時間の次元を持つ.

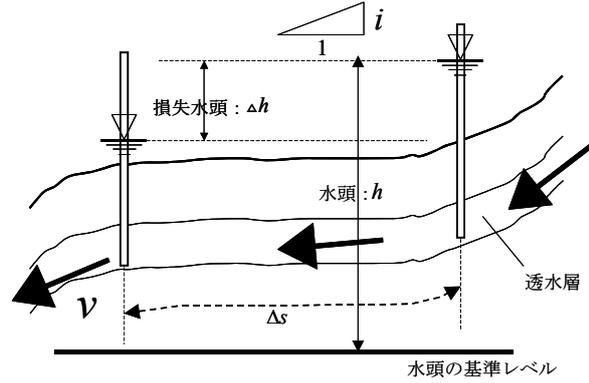


図 2.10 地盤中の水の流れとダルシーの式

## 2.6 圧密方程式の解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

この式は放物線型の偏微分方程式と呼ばれ, 熱伝導や物質の拡散を表す方程式と同一である. この式は変数分離法で解くことができる. すなわち間隙水圧  $u$  は空間座標  $z$  と時間  $t$  の関数であるので, 次式のように2つの関数の積で表せると仮定する.

$$u(z, t) = U(z)X(t) \quad (2.14)$$

これを, 式(2.11)に代入すると,

$$U(z) \frac{\partial X(t)}{\partial t} = C_v X(t) \frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} \quad (2.14)$$

これを変数分離し, その共通の値を  $-\beta^2$  (負の値) とおく. ここであえて負の値を設定する理由については式(2.19)のところで述べる.

$$\frac{1}{C_v X(t)} \frac{\partial X(t)}{\partial t} = \frac{1}{U(z)} \frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = -\beta^2 \quad (2.15)$$

この式より, 以下の  $z$  に関する式と  $t$  に関する式が得られる.

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + \beta^2 U(z) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} + C_v \beta^2 X(t) = 0 \quad (2.17)$$

式(2.16)と式(2.17)の一般解はそれぞれ式(2.18), 式(2.19)のように書けることは, それらを元の式に代入してみれば容易に分かる. ここに,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  は任意の定数である.

$$U(z) = A \cos \beta z + B \sin \beta z \quad (2.18)$$

$$X(t) = C \exp(-C_v \beta^2 t) \quad (2.19)$$

式(2.19)の右辺のカッコの中は負の値であり, 時間  $t$  の増加とともに  $X(t)$  はゼロに収束することを意味している.

この条件を満足するために式(2.15)で  $-\beta^2$  と設定したのである.

ここで,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を定めるための境界条件を図 2.11 のように考える. 不透水境界 ( $z=0$ ) では流れがないから常に動水勾配はゼロである. したがって, 図 2.11 のように, 等水圧線は不透水境界と直交することになる. すなわち,  $\partial u / \partial z = 0$ . したがって,

$$z=0; \quad \left. \frac{\partial U(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\beta A \sin \beta z + \beta B \cos \beta z \Big|_{z=0} = \beta B = 0 \rightarrow B=0$$

一方, 透水境界 ( $z=H$ ) では過剰間隙水圧は常にゼロであり,  $u=0$ . したがって,

$$z=H; \quad U(H) = A \cos \beta H = 0$$

よって,  $n$  を任意の正の整数として,  $\beta H = (2n-1) \frac{\pi}{2}$  したがって  $\beta = \frac{2n-1}{H} \frac{\pi}{2}$

これより式(2.18)は式(2.20)の形となり, それに伴い, 式(2.19)の解は式(2.21)で表される.

$$U(z) = U_n(z) = A_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H} \quad (2.20)$$

$$X(t) = X_n(t) = C_n \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 \frac{C_v}{H^2} t \right] \quad (2.21)$$

したがって,

$$u(z,t) = U_n(z) X_n(t) = A_n C_n \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 \frac{C_v}{H^2} t \right], \quad n=1 \sim \infty \quad (2.22)$$

またこれらの線形和も式(2.13)の解となるから, 次式が境界条件を満たす特解の一般的形となる.

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 \frac{C_v}{H^2} t \right] \quad (2.23)$$

ここに,  $A_n C_n \rightarrow A_n$  と置きなおしている. 上式に含まれる定数  $A_n$  は初期条件 (時間  $t=0$  での間隙水圧の分布) から決めることができる. 時間  $t=0$  での間隙水圧の分布を  $u_0(z)$  とおくと,

$$u(z,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H} \right] = u_0(z) \quad (2.24)$$

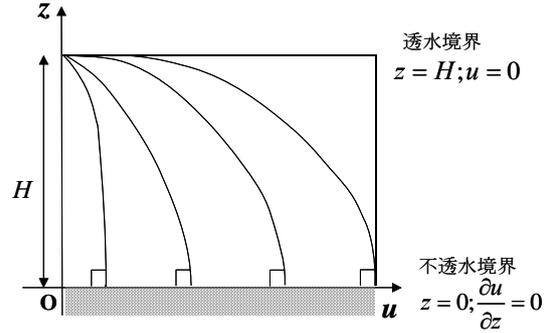


図 2.11 圧密方程式で用いる透水の境界条件

ここで三角関数の直交性を利用して、上式の両辺に  $\cos\left[\frac{(2m-1)\pi z}{2H}\right]$  ( $m=1\sim\infty$ ) を乗じてから区間

$z=0\sim H$  で積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^H \cos\left[\frac{(2m-1)\pi z}{2H}\right] \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] dz = \int_0^H u_0(z) \cos\left[\frac{(2m-1)\pi z}{2H}\right] dz \quad (2.25)$$

上式の左辺の積分の値は、 $m=n$ の時  $H/2$ 、 $m\neq n$ の時  $0$  であることは、積分を実行することにより容易に分かる。したがって、式(2.25)より定数  $A_n$  が計算できる。

$$A_n = \frac{2}{H} \int_0^H u_0(z) \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] dz \quad n=1\sim\infty \quad (2.26)$$

したがって、これを式(2.23)に代入すると、解は最終的に次式の形となる。

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{H} \left\{ \int_0^H u_0(z) \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] dz \right\} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{C_v}{H^2} t\right] \quad (2.27)$$

もし、初期の過剰間隙水圧の深度分布が矩形であると、 $u_0(z)=u_0$  一定であるので、式(2.26)より、

$$A_n = \frac{2u_0}{H} \int_0^H \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] dz = \frac{2u_0}{H} \frac{2H}{(2n-1)\pi} \left[ \sin\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] \right]_0^H = (-1)^{n-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} u_0 \quad (2.28)$$

となり、式(2.23)に代入すると、式(2.27)の代わりに次式が得られる。

$$u(z,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{C_v}{H^2} t\right] \quad (2.29)$$

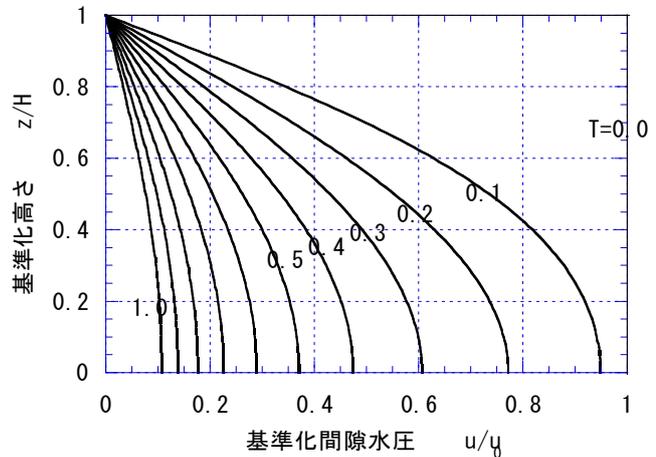
ここで次式で定義される時間係数あるいは無次元化時間と呼ばれる  $T$  (単位は無次元) を導入する。

$$T = \frac{C_v}{H^2} t \quad (2.30)$$

これを式(2.29)に導入すると、

$$u(z,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right] \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \quad (2.31)$$

この式より、深度方向の過剰間隙水圧の時間変化を、 $T$  をパラメータとして描いたのが、**図 2.12** である。 $T=0$  の時に矩形分布から出発した水圧が透水境界から徐々に低下し、その分が有効応力に置き換わっていく様子が分かる。水圧が完全に消散するのは式(2.31)によれば  $T=\infty$  の時点であるが、 $T=1.0$  の時には**図 2.12** に示すように、すでにほとんど消散してしまっているので、 $T=1.0$  をもって実用的には圧密終了とみなしている。



**図 2.12** 矩形の初期過剰間隙水圧の式(2.31)による計算結果

## 2.7 圧密沈下量の時間経過の計算法

つぎに、圧密によって生じる粘土層の沈下量について考える。前述のように水圧の消散により置き換わる有効応力によって、土粒子骨格の圧縮が起き沈下が生じるので、式(2.11)を用い、全応力  $\sigma_v = u_0$  と考えれば、圧密途中の沈下量  $S$  は次式で表せる。

$$S = \int_0^H \varepsilon dz = m_v \int_0^H (u_0 - u) dz \quad (2.32)$$

また、最終沈下量  $S_\infty$  は次式で表される。

$$S_\infty = m_v \int_0^H u_0 dz \quad (2.33)$$

ここで、圧密度  $E(T)$  を時間係数  $T$  の関数として定義し、最終沈下量に対する沈下量の比で表すと、

$$E(T) = S/S_\infty = \frac{\int_0^H (u_0 - u) dz}{\int_0^H u_0 dz} = 1 - \frac{\int_0^H u dz}{\int_0^H u_0 dz} \quad (2.34)$$

$u_0(z) = u_0$  一定の場合について、上式に式(2.31)を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} E(T) &= 1 - \frac{4u_0/\pi}{u_0 H} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \int_0^H \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H}\right] dz \right\} \\ &= 1 - \frac{4u_0/\pi}{u_0 H} \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H}\right] \Big|_{z=0}^H \right\} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2(n-1)}}{(2n-1)^2} \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

これを数値計算したものが図 2.13 の矩形初期間隙水圧分布の実線カーブであるが、時間係数  $T$  の小さい間で圧密が急速に増加し、 $T=1.0$  では、圧密沈下の 92% はすでに終了していることが分かる。また、このカーブの  $T \leq 0.3$  に入る圧密初期の段階では、次の放物線カーブ

ではほぼ近似できることが分かる(参考文献(1))。

$$E(T) = 2\sqrt{T/\pi} \quad (2.36)$$

$T$  が大きくなる圧密の終了近くにおいては

$$T = 1.0 \rightarrow E(T) = 0.93$$

$$T = 3.0 \rightarrow E(T) = 0.99$$

$$T = \infty \rightarrow E(T) = 1.00$$

であり、理論通りに圧密終了するには無限長時間が必要である。しかし、実用上は  $T=1.0$  で  $E(T)=0.93$  の時に圧密終了としている。この時、式(2.30)より  $T = C_v t / H^2 = 1.0$  すなわち、圧密終了時間  $t_c$  は次式で表される。

$$t_c = \bar{H}^2 / C_v \quad (2.37)$$

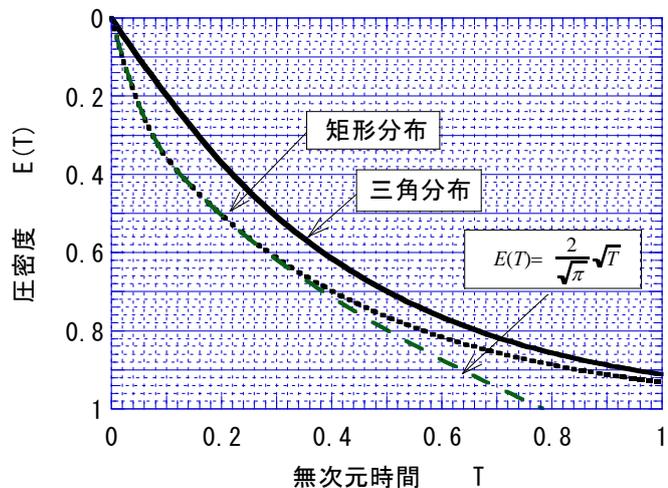


図 2.13 初期過剰間隙水圧が矩形および三角形分布の場合の式(2.35)と式(2.35')による圧密度の計算結果

上式で  $\bar{H}$  は片面透水境界条件に対応した粘土層の厚さである。これは、前述の圧密方程式を解くうえで用いた境界条件図 2.11 を見れば明らかである。

この境界条件を再び図 2.14(左)に示す。粘土層の上下両面が透水境界である場合には、図 2.14(右)に示すように間隙水は層厚のちょうど半分の深さの位置で間隙水圧の深さ方向の勾配がゼロ（水平面に直交）となり、その面を通る間隙水の移動が生じない。

すなわち両面透水境界の場合、層厚の中心位置が不透水境界に対応することになるので、粘土層厚  $H$  の半分を  $\bar{H}$  ととり、 $\bar{H} = H/2$  とする必要がある。式(2.37)より、圧密終了時間は  $\bar{H}$  の 2 乗に比例するため、 $H$  が同じであっても、片面透水か両面透水かにより圧密時間に 4 倍の違いが現れることになる。

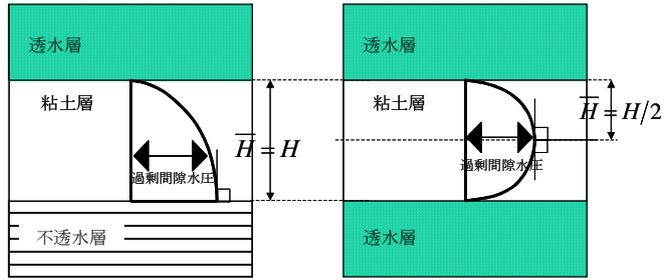


図 2.14 境界の透水条件による粘土層の  $\bar{H}$  の決め方

演習：土粒子の沈降・堆積により厚さ  $H$  の未圧密土が自重圧密する場合を考えると、初期の過剰間隙水圧分布は三角形分布となる。上の式(2.25)において初期の過剰間隙水圧分布が矩形分布  $u_0(z) = u_0$  一定の代わりに三角形分布  $u_0(z) = u'_0(H-z)/H$  であった場合に、片面排水条件の式(2.31)と式(2.35)に対応する式を求め、圧密度の時間変化を計算せよ。

式(2.25)の  $u_0$  の代わりに  $u_0(z) = u'_0(H-z)/H$  を代入することにより、

$$u(z,t) = \frac{8u'_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H}\right] \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \quad (2.31')$$

この計算結果を図 2.13' に示す。さらに、それを式(3.34)に用いることにより、

$$E(T) = 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T\right] \quad (2.35')$$

この式の計算結果は図 2.13' に実線で示されている。また、式(2.31)と式(2.31')の矩形と三角形の初期水圧分布に対応した解の線形和により、任意の台形の初期間隙水圧分布についての解が求められることになる。

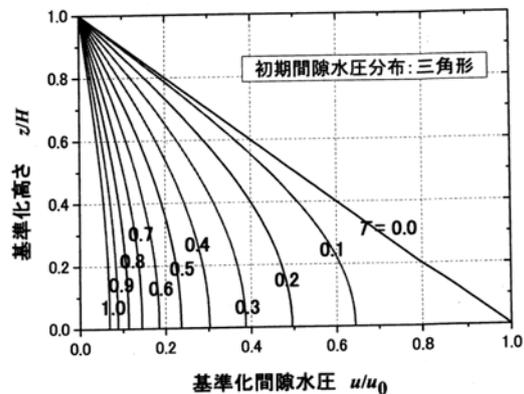


図 2.13' 初期過剰間隙水圧が三角形分布の場合の式(2.31')による過剰間隙水圧分布の計算結果

以上の結果をまとめると、盛土荷重が載った場合の圧密沈下の時間経過は、矩形の初期水圧分布を前提として、以下のように計算ができる。

圧密終了までの時間：

$T = C_v t / \bar{H}^2 = 1.0$  をもって便宜的に圧密終了としているため、 $t_c = \bar{H}^2 / C_v$  が圧密終了までの経過時間である。

圧密途中での沈下量：

以下の手順で行う。

- 1) 無次元時間  $T = C_v t / \bar{H}^2$  の計算 (ただし、 $\bar{H}$  = 片面透水条件の粘土層の層厚)。
- 2) 式(2.34),(2.35)に基づき、図 2.13 に示された計算結果により  $T$  から  $E(T) = S/S_\infty$  を求める。
- 3) 時間  $t$  での沈下量は 対応する  $T$  より次式により計算できる。

$$S = S_\infty \cdot E(T) \quad (2.38)$$

## 2.8 圧密試験

標準圧密試験は厚さ 2.0cm 直径 6.0cm の粘土の試料で両面排水条件で行う。圧密時間は  $\bar{H}$  の 2 乗に比例するため、原地盤に比べて非常に短時間で圧密終了できる。たとえば、20m の厚さの両面が透水層の粘土地盤に対しては、図 2.15 のように 1/100 万の時間で圧密が終了することになる。

標準圧密試験では、応力段階  $p' = 10, 20, 40, 80, 160$  kPa という 2 倍増分で段階的に载荷していく。これにより  $\log p'$  スケール上で等間隔のデータが得られる。

データ整理は以下の 2 種類に分けられる。

(a) 各荷重段階での沈下～時間曲線から  $C_v$  を算定

(b) 全段階をまとめて応力～沈下曲線から  $C_c, C_s, p_c, m_v$  を算定

(b) については、図 2.5 の説明などからデータ整理法の理解が可能であるため、ここでは (a) 各荷重段階の整理について述べる。

式(2.30)より  $C_v = \bar{H}^2 T / t$  であることと、さらに、図 2.13 より矩形の初期水圧分布の場合に圧密度  $E(T)$  と時間係数  $T$  の関係が

$$E(T) = 50\% \rightarrow T = 0.197, \quad E(T) = 90\% \rightarrow T = 0.848$$

であることを用いると、 $C_v$  は以下の 2 式のいずれかにより算定できる。

$$C_v = \frac{0.197 \bar{H}^2}{t_{E=50\%}} \quad \text{または} \quad C_v = \frac{0.848 \bar{H}^2}{t_{E=90\%}} \quad (2.39)$$

ここに、圧密試験は両面排水条件で行われるため、 $\bar{H}$  は試料厚さの 1/2 である。

圧密試験では圧密度  $E(T) = S/S_\infty$  の  $S_\infty, S$  が初期の試料端面のなじみの影響や最終段階での 2 次圧密

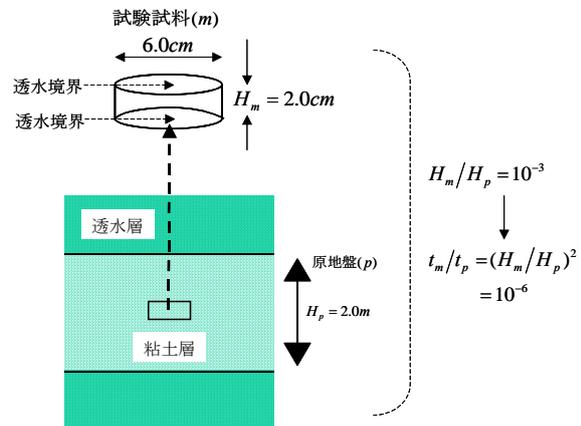


図 2.15 原地盤と標準圧密試験での圧密時間の比較

の影響などにより直接的には決定できないため、式(2.37)の  $t_{E=50\%}$ ,  $\sqrt{t_{E=90\%}}$  を以下の2つの方法で決めることとしている。

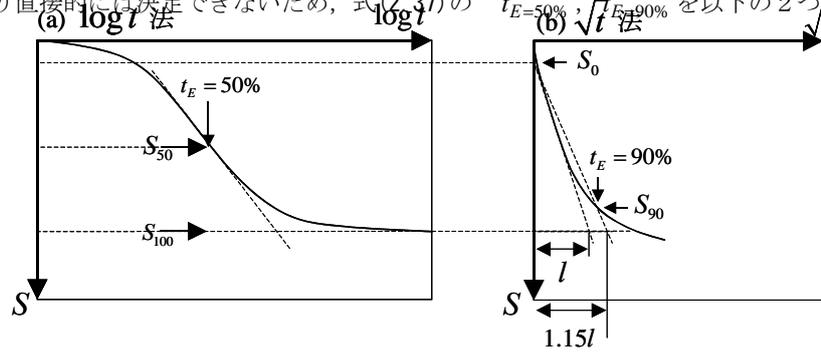


図 2.16 原地盤と標準圧密試験での圧密時間の比較

- $\log t$  法：図 2.16 (a) のように時間の対数と沈下量の関係を片対数グラフにとり、曲線の後半部のカーブの 2 本の接線から求めた折れ曲がり点の沈下量  $S_{100}$  を算定する。それと、後述の  $\sqrt{t}$  法から求められる  $S_0$  からその中間の沈下量  $S_{50}$  を決定し、それに対応した  $t_{E=50\%}$  を読みとる。
- $\sqrt{t}$  法：図 2.16 (b) のように時間の平方根と沈下量の関係をグラフにとり、曲線の前半の直線部の接線を描き時間  $t=0$  での沈下量  $S_0$  をよみとり、さらにその  $S_0$  の点を通してその接線勾配の 1.15 倍の勾配の直線を描き、実験曲線との交点を圧密度 90% の点  $S_{90}$  として、その点に対応した時間  $t_{E=90\%}$  を読みとる (1.15 倍の勾配の直線と実験曲線との交点が圧密度 90% の点に対応する理由については参考文献 (1) を参照すること)。

## 2.9 2次圧密現象

テルツァギの圧密理論では土粒子骨格を線形弾性体とし、式(2.2)の体積圧縮係数  $m_v$  は一定値と仮定した。この場合、圧密現象は図 2.17 (a) のように弾性バネで支えられた穴あき蓋が間隙水の排出とともに沈下し有効応力が回復することでモデル化される。しかし、実際の土粒子骨格については粘弾性や非弾性的性質が無視できない。そのため、テルツァギの圧密理論で表される 1 次圧密が終了しても、2 次圧密が長期的に生じる。2 次圧密を表現するモデルとしては図 2.17 (b) のように、バネとダッシュポットからなる粘弾性バネにより支えられた穴あき蓋で表されることが多い。

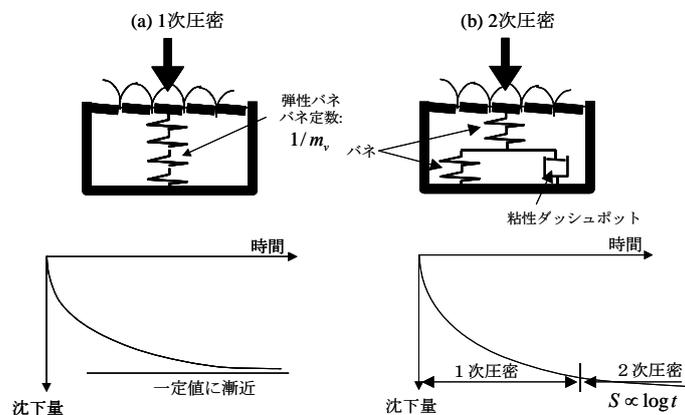


図 2.17 1次圧密と2次圧密のモデルと沈下量～時間関係

## 2.10 地盤の全沈下量の計算法

圧密に関する本章の検討より、地盤に均一な荷重が加わった場合の沈下量は次式で計算できる。

$$\text{全沈下量} = \text{瞬時沈下量} + \text{圧密沈下量}$$

これらの沈下量は時間に対して図 2.18 に示すように生じる。すなわち、瞬時沈下量は砂・礫地盤のように透水性の大きな地盤の沈下量で、荷重載荷とほぼ同時に現れる。その沈下量の計算法は一般に変形係数（弾性体のヤング係数に当たるもの）を用いる方法と、粘土と同様に  $C_c$  や  $m_v$  を用いる方法がある。

圧密沈下量は透水性の低い粘土・シルトからなる地盤の沈下で圧密度に応じて増加する。1次圧密による最終沈下量は式(2.6)あるいは式(2.7)により計算できる。1次圧密途中での沈下量は式(2.32)で定義される  $E(T)$  の値を図 2.13 から読みとり、式(2.38)により計算できる。

圧密度1次圧密終了後にも2次圧密が長期にわたって継続する。とくに人工島のような載荷面積の大きな荷重については、大深度まで応力の増加の影響が及ぶため、2次圧密による沈下量の割合が大きくなる。

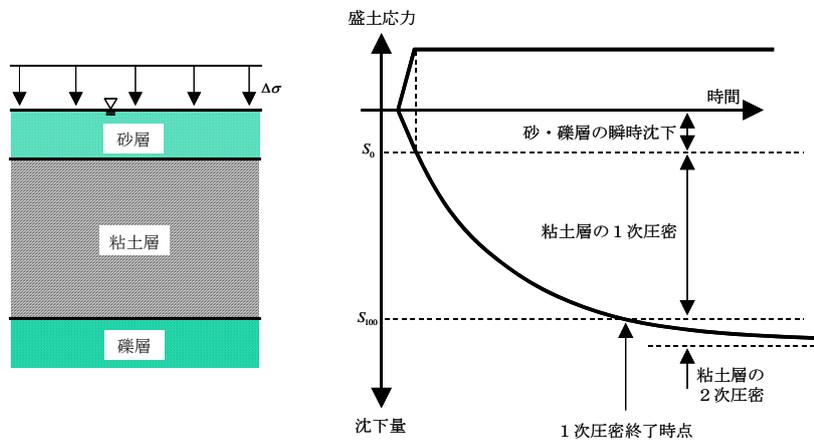


図 2.18 地盤沈下の時間経過の概念

## 2.11 パーティカルドレーンによる圧密促進工法

厚い粘土層はそのままでは圧密終了までに何十年もの年月がかかり、工事終了後に圧密沈下により上部構造物に機能障害が生じることになる。これを避けるため、工事期間中の短期に沈下を終了させるためにパーティカルドレーンによる圧密促進工法を行うことが多い。図 2.18 のように粘土地盤に砂杭（サンドドレーン）や中空のプラスチック板（プラスチックドレーン）などを正方形や正三角形格子に打設し、間隙水の水平方向への排水により圧密促進を図る。この場合、ドレーン間の粘土地盤は図のような円柱でモデル化でき、その直径は等面積の円から、正三角形の場合  $d_e = 1.05d$ 、正方形の場合  $d_e = 1.13d$  となる。ドレーンの間隔を短くすると排水距離が短くなるため、圧密終了まで

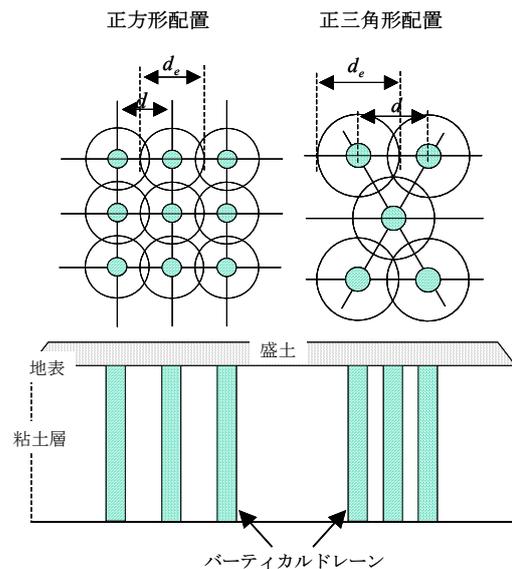


図 2.19 パーティカルドレーンによる圧密促進工法の概念

の時間は非常に短くなる。バーティカルドレーンでの圧密時間は

$$t = \frac{T_h}{C_h} d_e^2 \quad (2.40)$$

で表される。圧密度がほぼ 100% に近づく時間係数は円柱の直径  $d_e$  とドレーンの直径  $d_w$  の比  $n = d_e/d_w$  によって異なるが、 $n = 10$  の場合、 $T_h = 1.0$  で圧密度はほぼ 100% となる。したがって、式(2.30)より  $C_h \approx C_v$  つまり水平方向と鉛直方向の圧密係数が同じとした場合、ドレーンを打設した場合と打設しない場合で圧密終了までの時間は  $(d_e/\bar{H})^2$  の割合で短縮することになる。たとえば  $\bar{H} = 10m$ 、 $d_e = 2m$  であれば、圧密時間は 1/25 に短縮することになる。

参考文献 (1) : 石原研而著 「土質力学」 丸善株式会社

### 3 地盤のせん断破壊

#### 3.1 せん断とダイレイタンスー

地盤が上載荷重を受けると圧密・圧縮による沈下を生じることは前章で学んだ。1次元圧密理論では、地表面の全域に荷重が均一に載るという単純な条件で考えてきた。この場合、土の要素は側方には変形できず、1次元圧密が生じる。しかし実際の構造物の大きさは有限であり、地盤に載る荷重は場所によって変化する。その場合、均一な上載荷重がかかる構造物の中心付近では図 3.1 のように圧密・圧縮が主体であるが、荷重の端に近い部分では圧密と同時に鉛直応力  $\Delta\sigma_1$  と水平応力  $\Delta\sigma_3$  の違いによって **せん断変形** (Shear deformation) を生じる。鉛直応力と水平応力の違いが大きくなるとせん断変形が大きくなり生じるようになり、せん断強度を越えると地盤はせん断破壊をおこし、上載構造物にも破壊が生じる。地盤のせん断破壊は **せん断面** (Shear plane, Failure plane) あるいは **滑り面** (Slip surface) とよばれる面に沿って連続的に生じる。

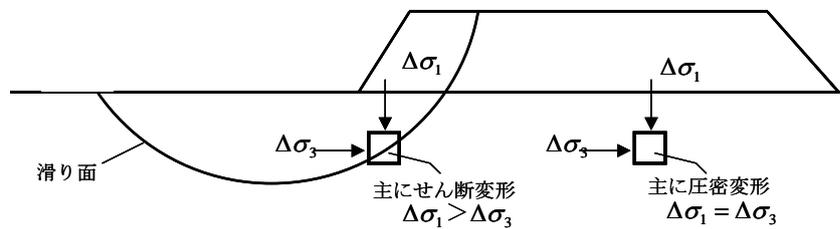


図 3.1 上載荷重下の土の要素の圧密・圧縮変形とせん断変形

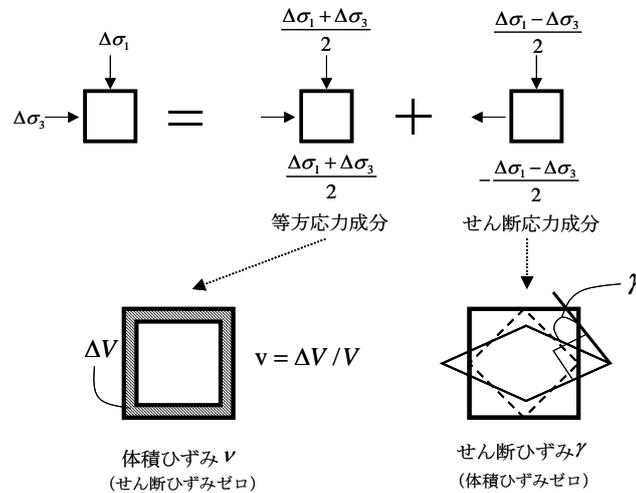


図 3.2 2次元弾性体での応力の等方成分とせん断成分への分解

このように、土の要素に鉛直と水平で異なる応力が働く場合、これを2次元応力条件で表すと、その応力状態は **等方応力成分**  $(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)/2$  と **せん断応力成分**  $(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)/2$  に分解して考えることができる。なお、せん断応力成分の2倍の  $(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$  を **偏差応力成分** と呼ぶ。

このうち、通常の弾性体では図 3.2 に示すように等方応力成分 (Isotropic stress component) は **体積ひずみ**

(Volumetric strain)  $v$  のみを生じ、土の場合にはこれが圧密体積ひずみに相当する。一方、せん断応力成分 (Shear stress component) はせん断ひずみ  $\gamma$  (Shear strain: いわゆる矩形要素の隅角部の角度変化と考えると良い) を生じることが材料力学ですでに学んだ通りである。ところが、土のような土粒子の集合体 (粒状体と呼ぶ) では、せん断応力成分によって、せん断ひずみ以外に体積ひずみが生じる。これを「**ダイレイタンシー(Dilatancy)**」とよび、第1章で述べたように、土質力学の3つのキーワードの一つにあげられる重要な特性である。すなわち図 3.3(a) に示すように、密度のゆるい土ではせん断応力を受けると粒子間の接点がはずれて、粒子の相互距離が縮まり、収縮側の体積ひずみが生じ、密度の大きな土では逆に膨張側への体積ひずみが生じる。

土が排水条件 (Drained condition) でせん断応力を受ける場合は、ダイレイタンシーによる体積変化は自由に生じることができるが、せん断応力が急速に加わると圧密のところで述べたように非排水条件 (Undrained condition) となり、透水性の小さな土では短期間に体積変化は生じることができず、その代わりに間隙水圧の変化が起きる。すなわち図 3.3(b) に示すように、密度のゆるい土ではせん断応力を受けると粒子間の接点がはずれて、粒子の相互距離が縮まり収縮側の体積ひずみが生じようとするが、短時間での間隙水の移動が難しいためその反動で間隙水圧が上昇し、その分、有効応力は減少する。密度の大きな土では逆に膨張体積ひずみが生じ得ない反動として間隙水圧の減少と有効応力の増加が生じる。ここに述べた非排水条件での間隙水圧と有効応力の変化が土質力学を分かりにくくしているもっとも大きな原因である。本章の以下の部分においてもこの現象がたびたび登場するが、基本はここに述べる単純な物理現象であり、その概念さえ飲み込めば後の理解は容易である。

以上をまとめて等方応力成分、せん断応力成分と体積ひずみ、せん断ひずみ、さらにそれらの間におけるダイレイタンシーの位置づけを図示すると図 3.4 のようになる。

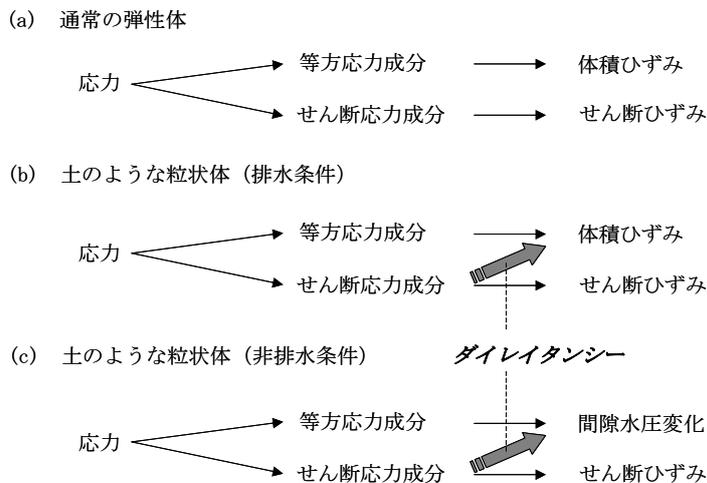


図 3.4 応力の等方成分とせん断成分への分解と体積ひずみ・せん断ひずみとの関係

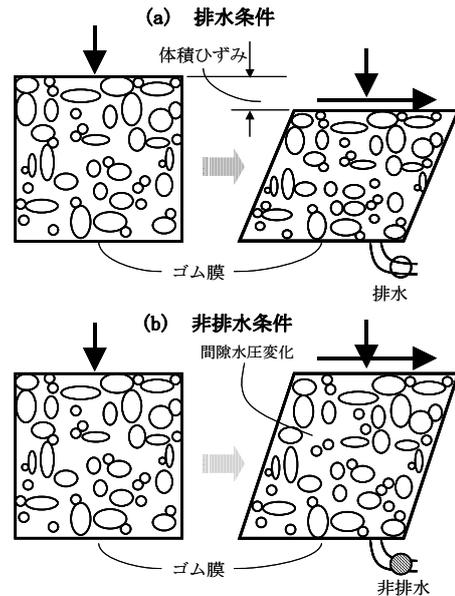


図 3.3 排水条件と非排水条件でのダイレイタンシーの影響

すなわち、ダイレイタンスーとは「せん断応力成分によりせん断ひずみと共に体積ひずみが生じる現象」と表すことができる。ダイレイタンスーは土のような粒状体特有の現象であり、特に図 3.4 (c) の非排水条件が実際の問題でもっとも生じやすく、土質力学を一見分かりにくい印象を与えている主な原因である。

### 3.2 非排水条件でのダイレイタンスーを考慮した間隙水圧の評価法

図 3.4 (c) の場合の間隙水圧変化の算定法について考えてみよう。そのために、間隙水圧増分  $\Delta u$  は等方応力増分  $(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)/2$  に比例する部分とせん断応力増分  $(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)/2$  に比例する部分（ダイレイタンスーによる部分）の和で表されると仮定し、各々の比例定数を  $B$  と  $A'$  とする。 $B$  については 1.6 節での式 (1.8) で定めた  $B$  値と同一である。すると次式が得られる。

$$\Delta u = B \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3}{2} + A' \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3}{2} = B\Delta\sigma_3 + (A' + B) \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3}{2} = B \left[ \Delta\sigma_3 + \frac{A' + B}{2B} (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \right]$$

これを、 $A = (A' + B)/2B$  としてあらたに定数  $A$  を定義すると、次式となる。

$$\Delta u = B \left[ \Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \right] \quad (3.1)$$

三軸応力状態での係数  $A$ 、 $B$  をスケンプトン (Skempton) の **間隙水圧係数** (Pore-pressure coefficient) と言う。式 (3.1) において、 $A=1/3$  の時  $\Delta u = B(\Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_3)/3$  となるがこれは三軸応力状態での等方応力に等しく、等方応力成分のみで  $\Delta u$  が表される。すなわち、 $A=1/3$  はダイレイタンスー効果がゼロである場合に対応している。以上の式による表現を非排水条件での三軸試験の応力状態で表すと、図 3.5 のようになる。図中の式の右辺 2 項目は通常の弾性体では生じないダイレイタンスー現象を含む水圧発生を表している。

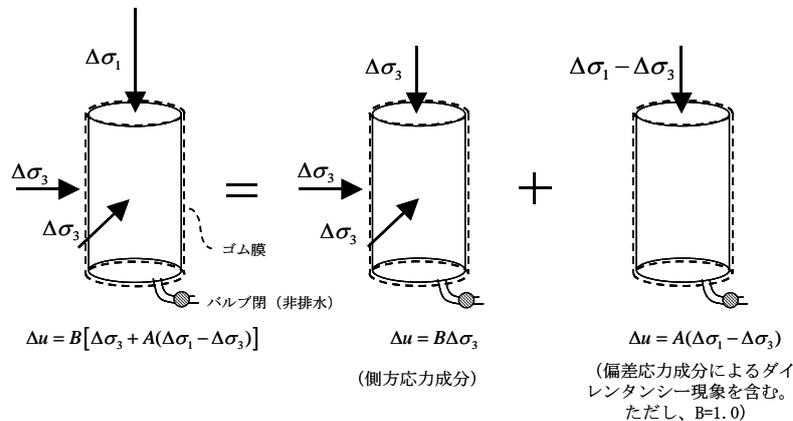


図 3.5 非排水条件の三軸試験での間隙水圧の発生

### 3.3 モールの応力円による応力状態の表示

地盤のせん断破壊を考える上で、土の要素に働く応力状態の理解が不可欠である。そのための便利な方法としてモールの応力円表示がある。

図 3.6 のような矩形の土の要素について、水平面と交わる角度が  $\alpha$  の平面上の応力、 $\sigma_\alpha$ 、 $\tau_\alpha$  と矩形の水平・鉛直面の応力の釣り合い条件より；

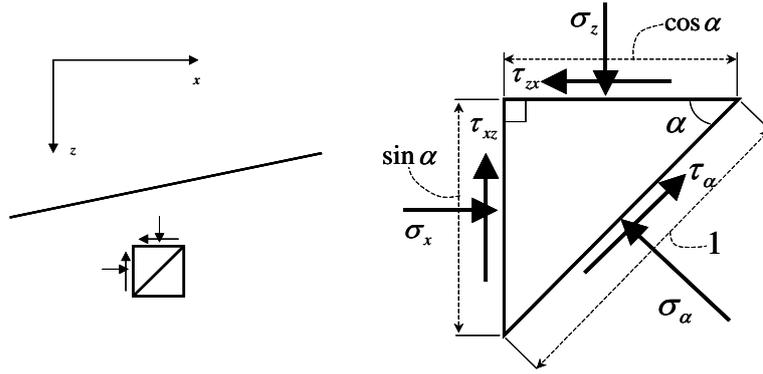


図 3.6 地盤中の矩形要素に加わる応力による角度  $\alpha$  の面の応力状態

$$x \text{ 方向の釣り合い: } \sigma_x \sin \alpha - \tau_{zx} \cos \alpha - \sigma_\alpha \sin \alpha + \tau_\alpha \cos \alpha = 0 \quad (\text{a})$$

$$y \text{ 方向の釣り合い: } \sigma_z \cos \alpha - \tau_{xz} \sin \alpha - \sigma_\alpha \cos \alpha - \tau_\alpha \sin \alpha = 0 \quad (\text{b})$$

上式 (a) と (b) より、傾き  $\alpha$  の面に作用する直応力  $\sigma_\alpha$  とせん断応力  $\tau_\alpha$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha - 2\tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

**主応力面** (Principal stress plane) とは、せん断応力がゼロとなる面のことである。

したがって、式(3.3)で  $\tau_\alpha = 0$  より、

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} \quad (3.4)$$

いっぽう、式(3.2)より直応力  $\sigma_\alpha$  の角度  $\alpha$  についての微係数がゼロとなる条件は、

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_z - \sigma_x) \sin 2\alpha - 2\tau_{xz} \cos 2\alpha = 0 \quad (3.5)$$

であるから、結局、式(3.3)と同じとなり、主応力面において、直応力は極値をとることになる。式(3.4)から、

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} \right) \quad (3.6)$$

となるが、これを満たす角度  $\alpha$  は  $0 \sim 180$  度で二つ求められる。それらをそれぞれ、**最大主応力** (Maximum principal stress)  $\sigma_1$  と **最小主応力** (Minimum principal stress)  $\sigma_3$  とよび、それらをとる面を最大主応力面、最小主応力面と呼ぶ。

クイズ 3.1:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  は次式で表されることを確認すること。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

一方、最大せん断応力面の角度  $\beta$  は式(3.4)の  $\tau_\alpha$  が最大値あるいは最小値をとる条件より、 $\beta \equiv \alpha$  として、

$$\frac{d\tau_\beta}{d\beta} = (\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\beta - 2\tau_{xz} \sin 2\beta = 0$$

より、結局、次式が得られる。

$$\tan 2\beta = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau_{xz}} \quad (3.7)$$

式(3.7)と式(3.4)を組み合わせると、次式が成り立つ。

$$\tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta = -1 \quad (3.8)$$

三角関数の公式を用いると、

$$\tan 2(\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan 2\beta}{1 + \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta} = \infty$$

となるため、結局、 $\alpha - \beta = \pm\pi/4$  となる。つまり、最大・最小主応力面と最大・最小せん断応力面は図 3.7 のように 45 度の違いがあることが分かる。最大・最小主応力をそれぞれ  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  とおくと、式(3.2)、(3.3)から最大・最小せん断応力面には  $\tau_{\max} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  の最大・最小せん断応力と  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  の直応力が作用することがわかる。

ところで、図 3.2 に示したせん断応力成分においては、鉛直と水平の応力が絶対値が同じで符号が異なるため、 $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$  の場合であり、最大・最小せん断応力面にはせん断応力しか働かない状態となる。このような応力状態を **純せん断** と呼ぶ。図 3.2 に示した応力の分解は実は純圧縮（純引張）と純せん断への分解であったことがわかる。

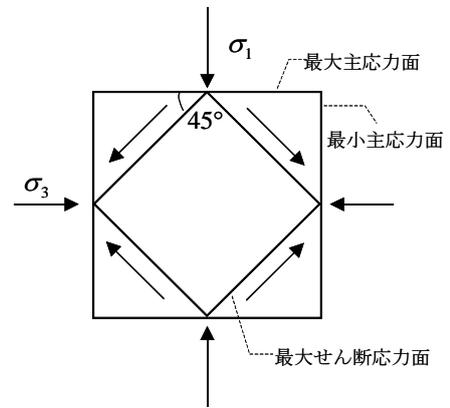


図 3.7 主応力面と最大せん断応力面の関係

### モールの応力円表示

式(3.2)、(3.3)において、 $\tau_{xz} = 0$ 、 $\sigma_z \equiv \sigma_1$ 、 $\sigma_x \equiv \sigma_3$  とすると

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

この2式より次式が得られる。

$$\left( \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (3.10)$$

これを、縦軸  $\tau_\alpha$  と横軸  $\sigma_\alpha$  をとって表すと、中心座標が  $((\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0)$ 、半径が  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  の円となる。これをモールの応力円と呼ぶ。式(3.9)と図 3.8(b)の応力円を見比べると、最大主応力面に対応した  $\sigma_\alpha$  軸上の座標  $(\sigma_1, 0)$  の点を出発点として、中心角  $2\alpha$ （あるいは円周角  $\alpha$ ）だけ反時計回りに回転した円周上の点の座標は式(3.9)で表され、図 3.8(a)のように、最大主応力面から  $\alpha$  だけ反時計回りに回転した面に働く直応力とせん断応力を表していることがわかる。ここで、反時計回りのせん断応力を、通常、正とすることにする。

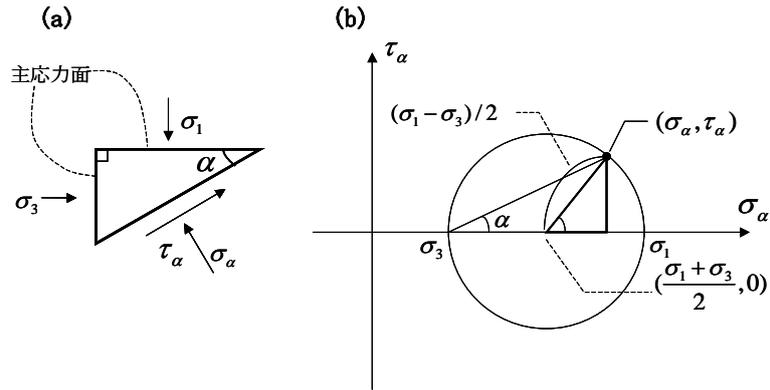


図 3.8 最大主応力面から角  $\alpha$  だけ傾いた面での応力  $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  を表すモールの応力円

なお、材料力学で学習したひずみの定義に基づけば、直ひずみ  $\varepsilon$  とせん断ひずみの半分の値  $\gamma/2$  の間にもモールの応力円とまったく同じ形のモールのひずみ円の式が成り立つことをつけ加えておく。

### 3.4 モールの応力円の極

モールの応力円を用いると主応力面から任意の角度を向いた面上の応力状態を簡便に求めることができるが、主応力面が任意の方向を向いている場合にも、次のような方法で簡便に任意の応力面の応力状態を求めることができる。すなわち、図 3.9 のように主応力面 AB と BC が任意の方向を向いている場合、モールの応力円上の最大主応力の点 N から最大主応力面 AB に平行に直線 NP を引き、円と交わった点 P を「極 (pole)」と名付ける。この極 P を通って任意の面 AC に平行に直線を引くと、円と交わった点 Q の座標は面 AC 上の直応力  $\sigma_\alpha$  とせん断応力  $\tau_\alpha$  を表している。これはモールの応力円の中心角  $\text{NOQ} = 2\alpha$  となることから容易に理解できる。

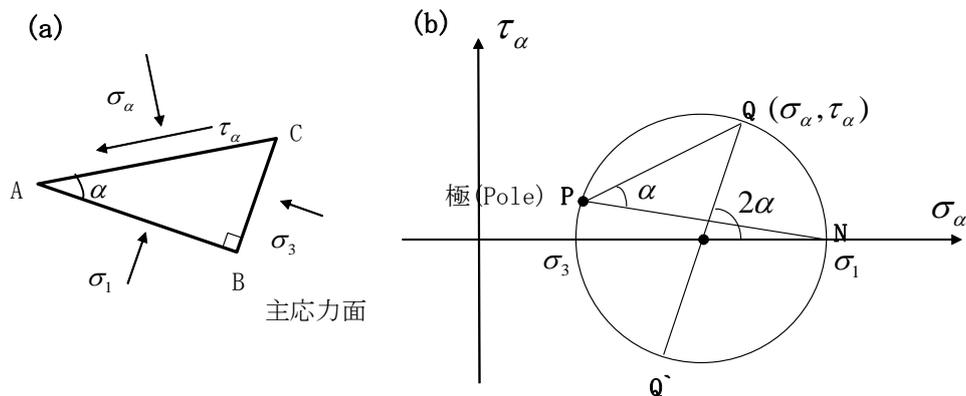


図 3.9 モールの応力円と極 P を用いた任意の方向を向いた主応力面と任意の角度をなす面上の応力の算定法

### 3.5 地盤のせん断破壊と土のせん断試験

図 3.10 のように地盤に荷重が載った時、荷重が限度を超えると地盤は滑り面 (Slip surface) に沿ってせん断破壊を起こす。一般に滑り面を円弧と考える場合が多く、これを**円弧滑り面**と呼ぶ。円弧滑り面に沿って図のように土の要素を考える。要素 A は底部に位置し、滑り面は水平方向を向いている。要素 B は鉛直に荷重が加わる部分の直下に位置し、滑り面は傾斜している。

要素 A の応力状態を再現する試験として**直接せん断試験** (または、**一面せん断試験**)、要素 B を再現する試験として**三軸圧縮試験**、要素 C を再現する試験として**三軸伸張試験**がある。

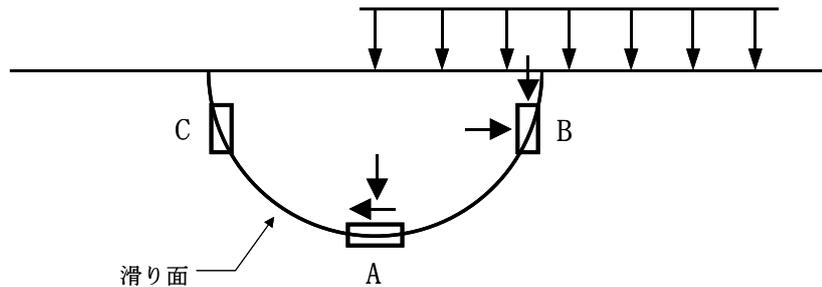


図 3.10 地盤の滑り面とせん断試験で想定する土の要素

#### (1) 一面せん断試験とクーロンの破壊基準

一面せん断試験 (Direct shear test) とは、原地盤から切り出した土を成形した供試体を上下二つ割りの金属容器に収め、鉛直応力  $\sigma$  で圧密を終了した後、せん断応力  $\tau$  を加えて、容器の境目で破壊させる試験法である。同じ土の試料から成形した数個の供試体を異なる鉛直応力  $\sigma_a$ 、 $\sigma_b$ 、 $\sigma_c$  で圧密してからせん断する時の  $\tau \sim \sigma$  面上の応力経路は図 3.11 の 3 本の矢印で表される。そしてその先端の破壊点を結ぶとほぼ図中の太い直線のようになる。この直線は**クーロンの破壊基準**とよばれ、式(3.11)で表される。

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \quad (3.11)$$

ここに、 $\tau_f$  は破壊時せん断応力である。 $c$  は**粘着力**(Cohesion)、 $\phi$  は**内部摩擦角**(Internal friction angle) であり、これらを土の強度定数と呼ぶ。一面せん断試験では有効応力の計測は行われないことが多いので、有効応力  $\Delta\sigma'$  (式(1.3)から  $\Delta\sigma' = \Delta\sigma - \Delta u$ ) は不明であり、ここで得られる強度定数は全応力に関する見かけの粘着力と内部摩擦角である。

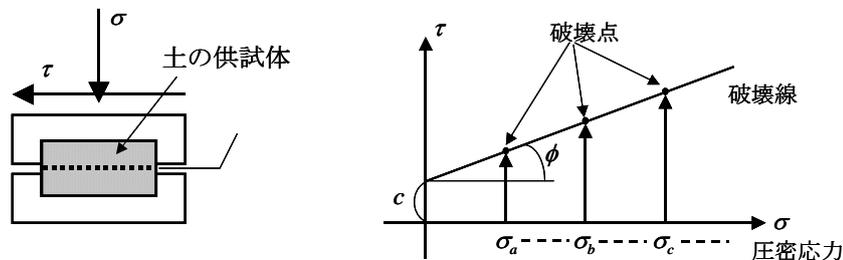


図 3.11 一面せん断試験での破壊点とクーロンの破壊基準の表示

(2) 三軸圧縮試験とモール・クーロンの破壊基準

三軸圧縮試験 (Triaxial compression test) とは、原地盤から切り出した土を円柱形の供試体に成形して、軸圧  $\sigma_1$  と側圧  $\sigma_3$  を加え ( $\sigma_1 \geq \sigma_3$ ) て、その差を大きくして破壊させる。この試験では応力の載荷面は主応力面であり、せん断面は土の内部摩擦角によって決まる角度だけ傾いた面で表れる。供試体はゴム膜で密封して間隙水の外部へのバルブを開閉することにより、排水・非排水条件をコントロールでき、非排水条件の時には供試体内部の間隙水圧を測定することにより、有効応力を知ることができる。

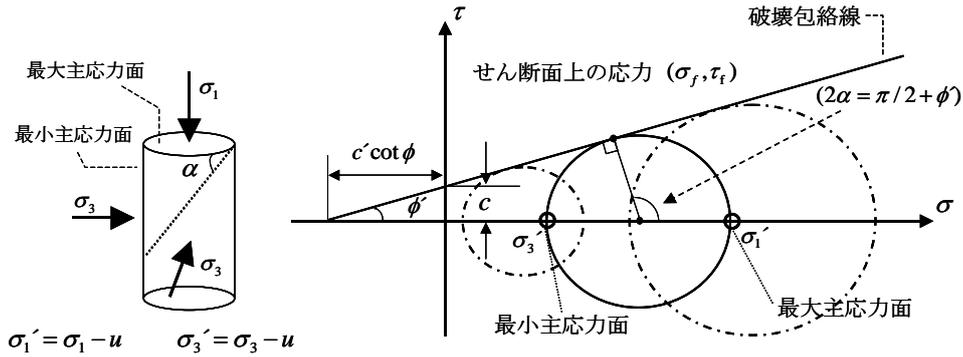


図 3.12 三軸試験から得られるモールの応力円の破壊包絡線とモール・クーロンの破壊基準

$\sigma_3$  を何段階か変化させた試験により複数のモールの円を描き、その**包絡線**を描く。包絡線と円との接点は破壊面に対応しており、包絡線の水平軸  $\sigma$  との角度が内部摩擦角  $\phi'$  に、縦軸  $\tau$  との接片が粘着力  $c'$  に対応している。したがって、図 3.12 の幾何学的関係から

$$\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = \left( c' \cot \phi' + \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) \sin \phi'$$

つまり、次式が成り立つ。

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = 2c' \cos \phi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi' \tag{3.12}$$

これを、**モール・クーロンの破壊基準**と呼ぶ。ダッシュの付いた記号は有効応力に関する値であることを意味している。ここでは有効応力のモールの円から定まる有効応力についての破壊包絡線と強度定数について考えているが、後に述べるように、全応力についても同様な方法で破壊包絡線を定める場合がある。

なお、有効応力についてのモールの応力円表示において、水平面から反時計回りに  $\alpha$  だけ傾いた面が三軸試験でのせん断面の角度となることは図 3.12 から明らかである。

クイズ 3.2 : 式(3.11)と式(3.12)は式の形が異なるが、モールの応力円のせん断面上での応力条件を式(3.11)に入れると式(3.12)に一致し、ふたつの破壊基準は一致することを確認せよ。

このようにして得られる土の強度定数の内部まさつ角  $\phi'$  と粘着力  $c'$  は土によって決まる特性値である。三軸試験で土の試料に  $\sigma_3$  を一定に保って  $\sigma_1$  を増加していくとき（軸差応力  $\sigma_1 - \sigma_3$  を増していくとき）、土の破壊、非破壊状態は破壊包絡線とモール円の位置関係から図 3.13 のように判断される。すなわち、モールの円が破壊包絡線に接した時点で土の破壊が生じ、その接点の座標がせん断面の応力状態（横座標＝直応力、縦座標＝せん断応力）を表している。モールの円が破壊包絡線を横切るとは決してない。なぜなら、土は破壊した時点でそれ以上の軸差応力は負担できず、変形だけが大きくなると考えるからである。

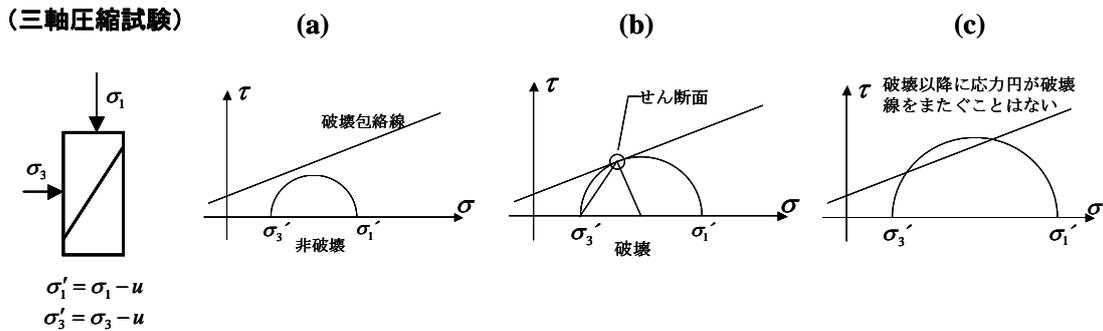


図 3.13 三軸試験から得られるモールの応力円の破壊包絡線とモール・クーロンの破壊基準

(3) 三軸圧縮試験での排水・非排水条件

土の試料をゴム膜で包み、地盤中と同じ側応力  $\sigma_3$  の下で軸応力  $\sigma_1$  を増加させて  $\sigma_1 > \sigma_3$  の条件で破壊させる。側応力はゴム膜を通して水圧で加え、軸応力は載荷盤により剛盤載荷する。バルブの開閉により排水試験あるいは非排水試験ができる。

図 3.14 は非排水条件でのモールの応力円と破壊包絡線を示す。計測値から直接得られるのは全応力のモール円であるが、水圧計によりゴム膜内部の間隙水圧を計測することにより、有効応力のモール円を得ることができる。破壊時の有効応力のモールの円が有効応力で定義された破壊包絡線に接した時に破壊が起きる。

排水条件の場合には、バルブを通して間隙水の移動が可能のため過剰間隙水圧の発生はなく  $\Delta u = 0$  で、 $\Delta \sigma = \Delta \sigma' + \Delta u$  より  $\Delta \sigma = \Delta \sigma'$  であるので、ほぼ有効応力に対応した排水条件の破壊時のモール円と破壊包絡線が得られる。

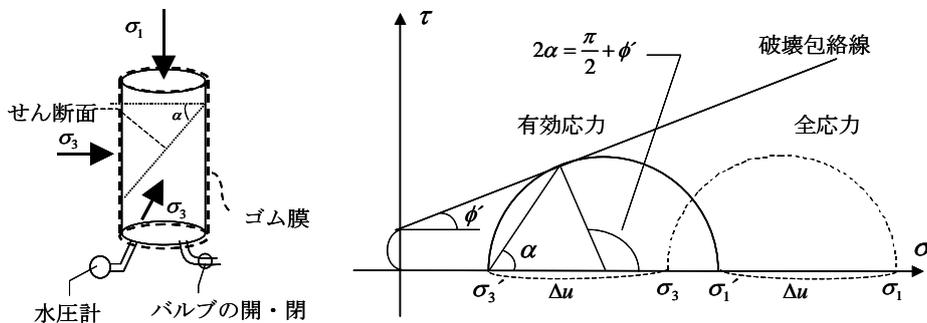


図 3.14 非排水三軸圧縮試験でのモール応力円と破壊包絡線

(4) 一軸圧縮試験

粘土のように自立する試料を円柱形に成形し、軸圧のみを加えてせん断する試験法を**一軸圧縮試験 (Uniaxial compression test)**とよぶ。この試験法の有効性の前提として、飽和粘土については原地盤での有効応力が間隙水圧(負圧)によって保たれていると仮定している。すなわち、地盤中で図 3.15 のように全応力  $\sigma$ 、有効応力  $\sigma'$  が働いていた土の試料を取り出すと試験室では全応力はゼロとなる。粘性土では透水性が低いため、地盤中の有効応力が室内でも保たれると考えると、図 3.15 から分かるように  $u = -\sigma'$  となり結局、間隙水圧が負になって(絶対圧力がゼロとなるまで大気圧分を使い果たして)有効応力を保持することができるかと仮定する。実際はこのような仮定は試料採取時の乱れなどで十分には成立たず、一軸圧縮試験では強度が実際より小さめに出ることが多い。

一軸試験での応力状態のモール円表示を図 3.16 に示す。破壊時の全応力のモール円は  $\sigma_3 = 0$  であるため原点を通ることになるが、上述の負の間隙水圧のおかげで  $\sigma' = -u$  の分だけ有効応力が大きくなる。したがって、ダイレイタンスを考えない場合の有効応力円は  $\sigma_3 = -u$  の破線の円のようになる。しかし、実際の破壊時にはさらに軸応力  $\sigma_1$  によって生じるダイレイタンス効果による間隙水圧の変化が加わるため、最終的には実線で示すようなモールの応力円となり、それが有効応力についての破壊包絡線と接することになる。せん断面の角度は図から明らかのように水平面から  $\alpha = \pi/4 + \phi'/2$  で、三軸試験の場合と同様である。

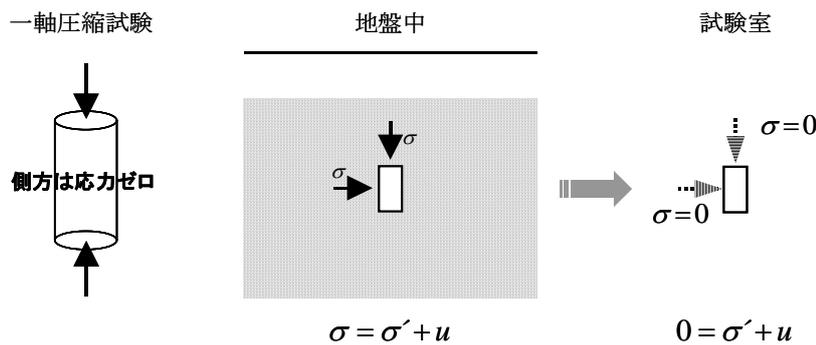


図 3.15 一軸圧縮試験の原理と方法

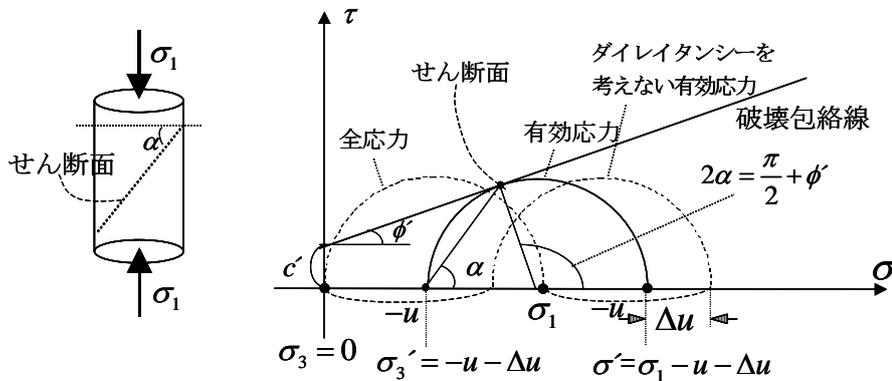


図 3.16 一軸圧縮試験でのモール応力円と破壊包絡線

(5) 三軸伸張試験

図 3.10 に示す滑り面に沿った土の要素 C は離れた位置に加わった荷重により側方から押され、鉛直方向に伸びるような破壊を考えるとよい。この状態に対応した試験が三軸伸張試験である。基本的には三軸圧縮試験と同じだが、地盤中と同じ側応力状態から軸応力  $\sigma_1$  を減少させるか 2 方向からの側応力  $\sigma_3$  を増加させて  $\sigma_1 < \sigma_3$  の条件で破壊させる。この場合も有効応力のモール円が有効応力の破壊包絡線に接したところで破壊が起きる。ただ、三軸圧縮試験と異なり、最大主応力面と最小主応力面が入れ替わるため、現れるせん断面の角度は水平面から反時計回りに  $\alpha (< 45^\circ)$  だけ傾いた面となる。

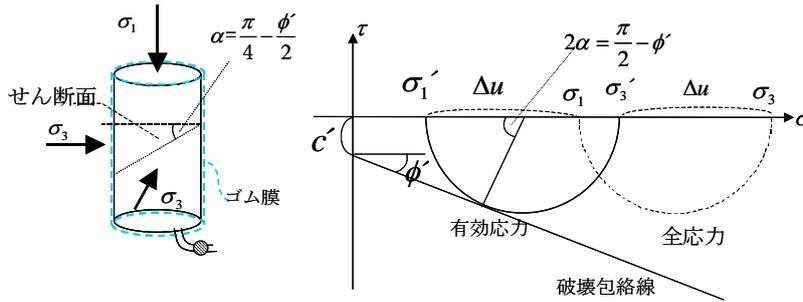


図 3.17 非排水三軸伸張試験でのモール応力円と破壊包絡線

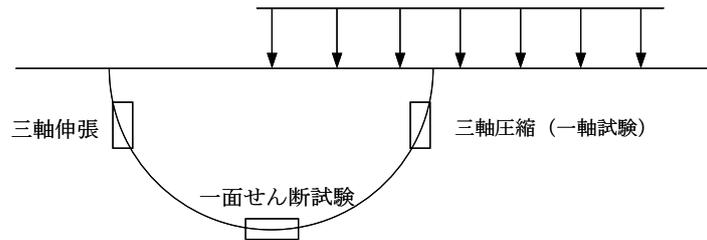


図 3.18 地盤への载荷による滑り線と各種土質試験との関係

以上の種々の試験は図 3.18 に示す地盤の滑り線に沿った土の要素の破壊試験にほぼ対応している。実際はこれらのいずれかの試験を行い、その試験値の特徴を考慮して設計に用いる強度定数を決めるのが良いとされている。

6) 単純せん断試験

ここまでは地盤の滑り線に沿った土の要素の応力状態の再現をめざした試験法について述べてきた。次に、これらとは異なり、図 3.19 のような地盤の地震時の応力を再現するために適した試験法として**単純せん断試験 (Simple shear test)**がある。地震波のうち、構造物の被害に直結する SH 波 (水平方向に振動し、鉛直方向に伝播する S 波) を対象に、その時の土の要素が受ける応力状態を再現するために、図 3.20 (a) に示すように土の要素を積層状の拘束リングで側方拘束し、上載圧  $\sigma_z$  を加える。この時、側方の拘束応力は静止土圧係数を  $K_0$  として、 $K_0\sigma'_z$  となる。次に地震時のせん断応力  $\tau_x$  を加えてせん断する。この時のモールの応力円は図 3.20 (b) のようになる。地震波は方向を変えながら繰り返し加わるので、その度に主応力面は回転す

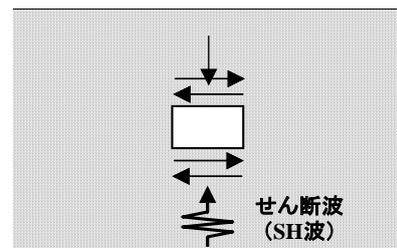


図 3.19 地震時の土の要素の応力状態

る事になり、三軸試験のように主応力面が常に一定である場合とは大きな違いがある。モールの円が破壊包絡線に接触する条件からせん断面の傾斜を求めると、主応力面からの角度は反時計回りに  $\alpha = \pi/4 + \phi'/2$  であり、主応力面が水平面から時計回りに  $\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{zx}}{\sigma'_z - K_0\sigma'_z}$  だけ傾いているため、せん断面は結局水平面から  $\alpha - \beta$  だけ傾いていることになる。

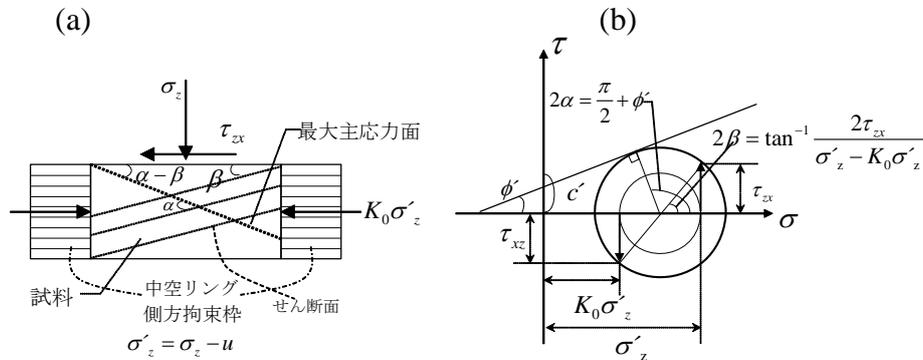


図 3.20 単純せん断試験でのモールの応力円と破壊包絡線

### 3.6 せん断試験での応力～ひずみ関係

これまでに、土の破壊条件を重点的に述べてきたが、土に応力が加わりはじめると変形が生じ、破壊にいたるまでには大きなひずみが発生することは鋼鉄やコンクリートなどのほかの土木材料と同様である。しかし、土の応力～ひずみ関係はいくつかの点でほかの材料と異なっている。まず、鋼材のような直線的な応力～ひずみ関係はほとんど見られず、最初から非常に非線形的である。また、せん断によるダイレイタンス効果によって、排水条件では体積ひずみが生じ、非排水条件では体積変化が許されないことの裏返しとして間隙水圧が変化することが大きな特徴である。

このように、排水・非排水条件が応力～ひずみ関係に大きな影響を与えるため、ここでは排水条件と非排水条件の2つの場合について応力～ひずみ関係を考える。

#### 排水三軸圧縮試験

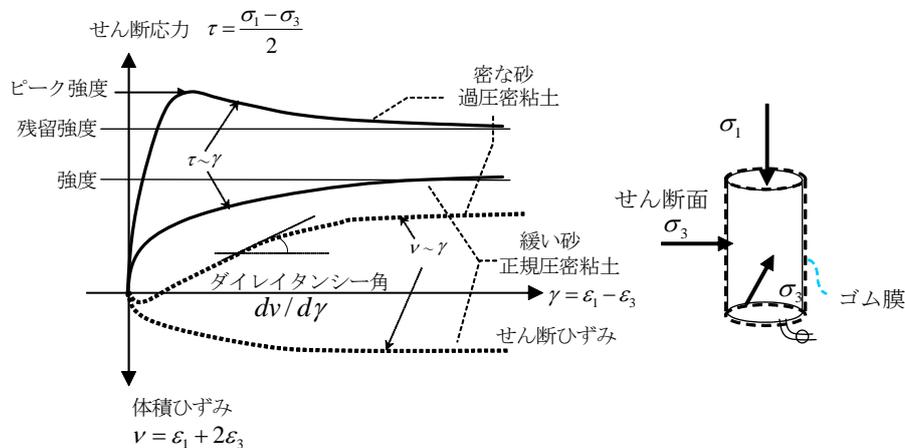


図 3.21 排水三軸圧縮試験の応力～せん断ひずみ関係と体積ひずみ～せん断ひずみ関係

せん断応力～せん断ひずみ ( $\tau \sim \gamma$ ) 関係は図 3.21 に示すように、土の密度によって大きく異なる。間隙比の大きな正規圧密粘土や緩い砂ではひずみに対し応力はゆるやかに増加し、強度に対応した最大応力に漸近するのに対し、間隙比の小さな過圧密粘土や密な砂では応力は急激に増加し、比較的小さなひずみ段階で**ピーク強度**を示した後に低下し、**残留強度**に漸近する。

一方、体積ひずみ～せん断ひずみ ( $v \sim \gamma$ ) 関係は、緩い土は単調に体積収縮を示すのに対し、密な土はいったん体積収縮した後、ピーク強度に達する前に膨張に転じ残留強度にいたるまで膨張し続ける。この  $v \sim \gamma$  曲線の勾配  $dv/d\gamma$  は**ダイレイタンス角**とよばれ、せん断による体積変化の傾向を見るために使われる。

せん断ひずみに対する体積ひずみの増減傾向を初期の間隙比の違いによって示すと、図 3.22 のようになる。すなわち、初期間隙比が大きい緩い土についてはせん断後の間隙比は減少し、体積収縮が生じる。一方、初期間隙比が小さい密な土については間隙比は増加し、体積膨張が生じる。したがって、その間に体積変化が全く生じない初期間隙比が当然存在し、それを**限界間隙比 ( $e_{cr}$ )**と呼ぶ。 $e_{cr}$  は側圧によって異なり、 $\sigma_3 \rightarrow$  大、 $e_{cr} \rightarrow$  小の傾向がある。

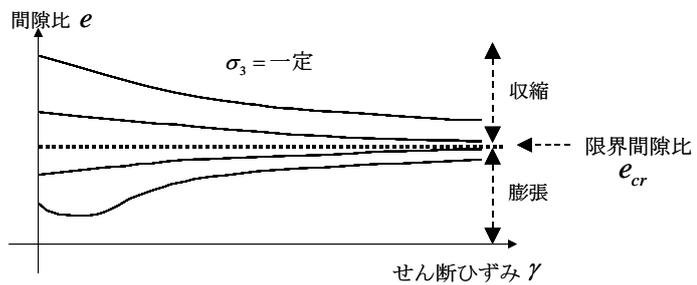


図 3.22 初期間隙比の異なる土のせん断ひずみと間隙比の関係

非排水三軸試験

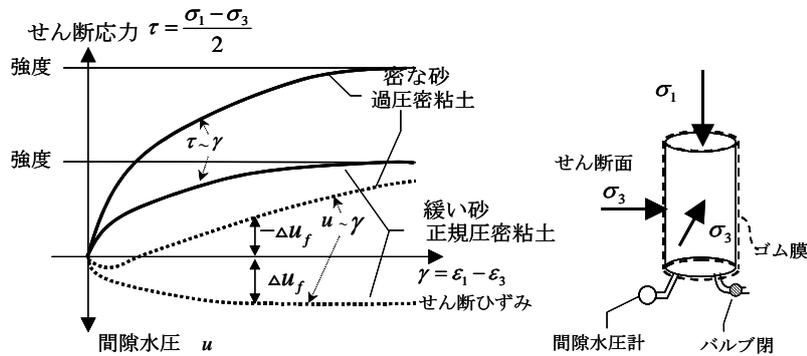


図 3.23 非排水三軸圧縮試験の応力～ひずみ関係と間隙水圧～ひずみ関係

非排水試験でのせん断応力～せん断ひずみ ( $\tau \sim \gamma$ ) 関係も土の密度によって大きく異なる。まず、図 3.23 に示すように密な土においてもピーク強度は表れにくく、単調に増加する傾向が現れる。密度の大小による強度差は後に述べる理由によって排水試験よりもはるかに大きくなる。排水試験の  $v \sim \gamma$  関係に代わる非排水試験での間隙水圧～せん断ひずみ ( $u \sim \gamma$ ) 関係は、緩い土では単調に水圧が増加していくが、密な土ではいったん正の水圧が発生した後、負の側に変化し、破壊強度にいたるまで負の方向に減少し続ける。緩い土においては間隙水圧が上昇する分、 $\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u$  から分かるように有効応力が減少し、したがって強度も減少する事になる。一方、密な土では逆の現象が起き、両者の強度差は排水条件よりもはるかに大きくなるわけである。破壊時に発生する過剰間隙水圧  $\Delta u_f$  は三軸試験に取り付けた間隙水圧計の値から読みとれる。これを、スケンプトンの間隙水圧係数  $A$ 、 $B$  を用いた式で表すと、3.2 節で述べたように  $\Delta u_f = B \{ \Delta\sigma_3 + A_f (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \}$  であり、破壊時点のその係数  $A_f$  は正規圧密粘土で、 $A_f = 0.5 \sim 1.5$ 、過圧密粘土で  $A_f = -0.5 \sim 0.5$  の範囲の値をとると言われている。

### 3.7 排水・非排水条件とせん断強度

土の強度や変形特性は土の有効応力状態によって一義的に決定できる。したがって、地盤の安定計算を行うために荷重による土の有効応力の初期から破壊までの変化（一般に外から加わる全応力は既知であるので、言い換えれば間隙水圧の変化とも言える）を正確に評価することができればよいことになる。しかし、荷重方法によって異なる原地盤での有効応力の変化量を統一的に評価する正攻法（**有効応力法**）は実務的ではなく、あまり使われない。その代わりに、もっと簡便な方法（**全応力法**）が通常の実務には使われている。

全応力法の基本的アプローチは、地盤への全応力の荷重過程を三軸試験機を用いて(a)等方圧密と(b)軸差応力のみによるせん断の2段階に分けて模擬するものである。そして、(a), (b)段階での排水・非排水条件を実地盤中の荷重条件に極力一致させることで、全応力のみによって（間隙水圧の発生量を直接評価せずに）せん断強度定数を定義し、それを直接設計に用いるものである。全応力法は(a), (b)段階での排水・非排水条件の違いにより以下の3種類に分かれる。

#### (1) 非圧密・非排水条件(**UU条件**:Unconsolidated Undrained condition)でのせん断強度定数

「急速施工盛土の施工中破壊」と名付けられるように、粘土地盤に上載荷重が加わってもそれにより圧密される時間的余裕のないままに非排水条件でせん断破壊する場合である。同じ深度の土はもともと同じだけ圧密されているが、急速施工により圧密が生じないため有効応力の増加がなく、破壊時の軸差応力が同じであるので、見かけ上、**非排水強度**  $c_u$  が一定となる。

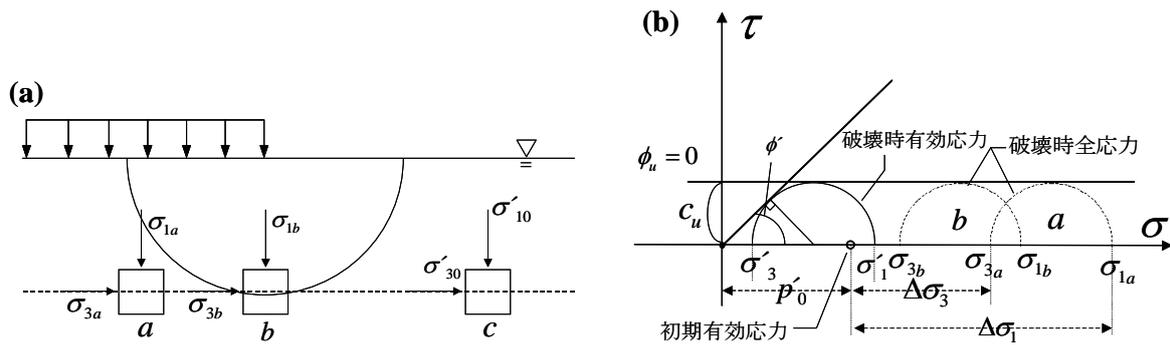


図 3.24 UU条件での地盤中の土の要素のモール円と破壊包絡線

これを理解するために、まず、図 3.24(a)のような地盤中の同じ深さの複数の要素 a, b, c を考える。これらの要素は盛土からの距離は異なるが、盛土以前の初期の鉛直・水平応力はいずれも同じである。初期の鉛直と水平の有効応力は一般に  $\sigma'_{10}$  と  $\sigma'_{30}$  の異なる値をとるが、簡単のため  $p'_0 = (\sigma'_{10} + \sigma'_{30})/2$  (すなわち平均主応力) の初期応力により等方圧密されていると考える。実際、初期応力と盛土による応力増分は主応力面が一致するとは限らないため、平均主応力で等方に圧密されていると考えた方が単純化できる。これに盛土による応力増分  $\Delta\sigma_1$ ,  $\Delta\sigma_3$  が加わるとして、図 3.24(b)のモールの応力円により考える。この時の非排水条件下の間隙水圧の増分は、前出の式

$\Delta u = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]$  において、飽和土であるから、 $B = 1.0$  として、

$$\sigma'_1 = p'_0 + \Delta\sigma_1 - \Delta u = p'_0 + (1 - A)(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \quad (3.13)$$

$$\sigma'_3 = p'_0 + \Delta\sigma_3 - \Delta u = p'_0 - A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \quad (3.14)$$

土の強度は有効応力で決まるので、正規圧密粘土の場合は一般に  $c' = 0$  であるため、モールの円が破壊線に接する条件から

$$\sin \phi' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} = \frac{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)}{2p'_0 + (1-2A)(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)} \rightarrow \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = \frac{2p'_0 \sin \phi'}{1 - (1-2A)\sin \phi'} \quad (3.14')$$

したがって、上式から

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma'_1 + \Delta u) - (\sigma'_3 + \Delta u) = \sigma'_1 - \sigma'_3 = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3 = \frac{2p'_0 \sin \phi'}{1 - (1-2A)\sin \phi'} = 2c_u \quad (3.15)$$

つまり、全応力の偏差応力（軸差応力） $\sigma_1 - \sigma_3$  は初期応力状態と  $A$ 、 $\phi'$  によって決まり、どんな要素であっても地表からの深さが同じであれば盛土荷重との位置の違いに関わらず同じ軸差応力で破壊するため、それを包絡する破壊線は水平となり見かけ上内部摩擦角はゼロとなる。その一定のせん断強度を非排水せん断強度と呼び、 $c_u = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  で表す。このような UU 条件に対応した三軸試験の方法を図 3.25 に示すが、 $\sigma_3$  による等方応力をかける段階とその後の  $\sigma_1 - \sigma_3$  の軸圧によるせん断の段階ともに、供試体を密封したゴム膜の内側と外部を結ぶバルブは遮断され、非排水状態となっている。

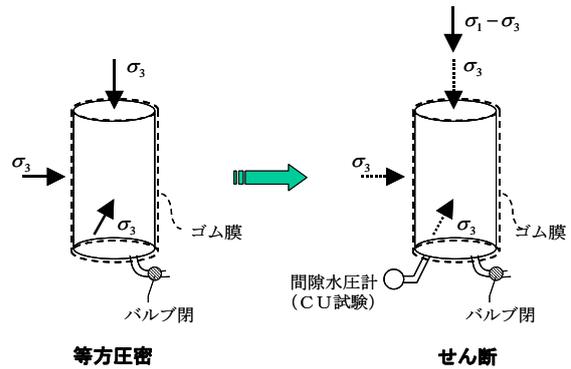


図 3.25 UU条件での三軸試験の方法

(2) 圧密・非排水条件(CU条件: Consolidated Undrained condition)でのせん断強度定数

「圧密終了後の急速破壊」と名付けられるように、施工中は地盤は破壊せずに上乗荷重による圧密が終了した後、何らかの原因（地震や豪雨などによる荷重の増加や強度の減少）により非排水条件でせん断破壊する場合、全応力のモール円を包絡する見かけの摩擦角  $\phi_{cu}$  が定義できる。

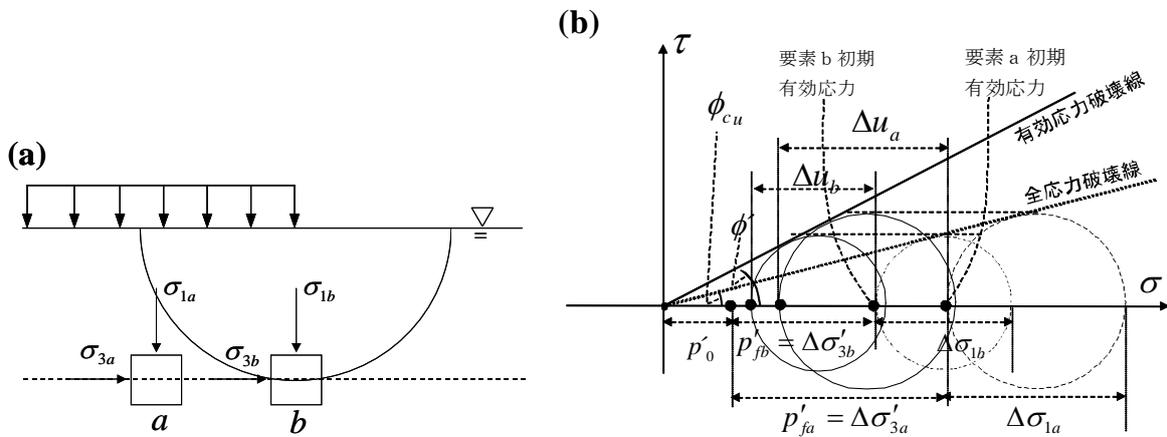


図 3.26 CU条件での地盤中の土の要素のモール円と破壊包絡線

これを数式的に表すと、たとえば図 3.26(a)に示す要素の盛土による圧密が終了した状態での有効平均主応力を  $p' = p'_0 + p'_f$  とする。ここに  $p'_f$  は盛土の圧密による平均主応力の増加分であり、三軸試験では排水条件での側圧  $\Delta\sigma_3$  がそれに相当すると考える。つまりこの試験では  $p' = p'_0 + p'_f = p'_0 + \Delta\sigma'_3$  で等方圧密し、それから  $\Delta\sigma_1$  の軸応力増分により非排水せん断する。 $p'_f = \Delta\sigma'_3$  は盛土からの距離によって異なり、要素 a, b についてそれぞれ  $p'_{fa} = \Delta\sigma'_{3a}$ ,  $p'_{fb} = \Delta\sigma'_{3b}$  まで等方圧密し、その後非排水せん断し軸応力増分が  $\Delta\sigma_{1a}$  と  $\Delta\sigma_{1b}$  で破壊した時のモールの応力円を図 3.26(b)のように考える。まず全応力については

$$\sigma_1 = p'_0 + \Delta\sigma'_3 + \Delta\sigma_1 \quad (3.17)$$

$$\sigma_3 = p'_0 + \Delta\sigma'_3 \quad (3.18)$$

有効応力については、UU条件の場合と同様に

$$\sigma'_1 = p'_0 + \Delta\sigma'_3 + \Delta\sigma_1 - \Delta u = p'_0 + \Delta\sigma'_3 + (1-A)\Delta\sigma_1 \quad (3.19)$$

$$\sigma'_3 = p'_0 + \Delta\sigma'_3 - \Delta u = p'_0 + \Delta\sigma'_3 - A\Delta\sigma_1 \quad (3.20)$$

正規圧密粘土の場合  $c' = 0$  として、モールの円が破壊線に接する条件から

$$\sin \phi' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} \quad (3.21)$$

あるいは、同じ要素の全応力の応力円が全応力の破壊包絡線に接する条件から

$$\sin \phi_{cu} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (3.22)$$

となる。式(3.21)(3.22)に式(3.17)~(3.20)を代入すると

$$\sin \phi' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} = \frac{\Delta\sigma_1}{2p'_0 + 2\Delta\sigma'_3 + (1-2A)\Delta\sigma_1} \quad (3.23)$$

$$\sin \phi_{cu} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{\Delta\sigma_1}{2p'_0 + 2\Delta\sigma'_3 + \Delta\sigma_1} \quad (3.24)$$

式(3.23)(3.24)より  $\Delta\sigma_1$  を求めると、

$$\Delta\sigma_1 = \frac{2(p'_0 + \Delta\sigma'_3)\sin \phi'}{1 - (1-2A)\sin \phi'} = \frac{2(p'_0 + \Delta\sigma'_3)\sin \phi_{cu}}{1 - \sin \phi_{cu}} \quad (3.25)$$

となり、これより

$$\frac{\sin \phi'}{1 - (1-2A)\sin \phi'} = \frac{\sin \phi_{cu}}{1 - \sin \phi_{cu}} \quad (3.26)$$

が  $\phi'$  と  $\phi_{cu}$  の関係を与える。

一方、式(3.15)から、正規圧密粘土では

$$c_u / p'_0 = \frac{\sin \phi'}{1 - (1-2A)\sin \phi'} \quad (3.27)$$

と表されるので、式(3.26)により

$$c_u / p'_0 = \frac{\sin \phi_{cu}}{1 - \sin \phi_{cu}} \quad (3.28)$$

あるいは次式が導かれる。

$$\sin \phi_{cu} = \frac{c_u / p'_0}{1 + c_u / p'_0} \quad (3.29)$$

これが、UU 条件での非排水せん断強度  $c_u$  と CU 条件での見かけの摩擦角  $\phi_{cu}$  との関係式である。

このような条件に対応した土質試験を CU 試験と呼ぶ。この試験では、図 3.27 に示すようにまず排水条件で等方応力  $\sigma_3$  で圧密し、その後、非排水条件にしてから軸応力  $\sigma_1 - \sigma_3$  によりせん断する。また、CU 試験のうち、非排水せん断中の間隙水圧の変化を計測する試験を  $\overline{\text{CU}}$  試験と呼び、その場合、有効応力に関する強度定数  $c'$ 、 $\phi'$  が得られる。

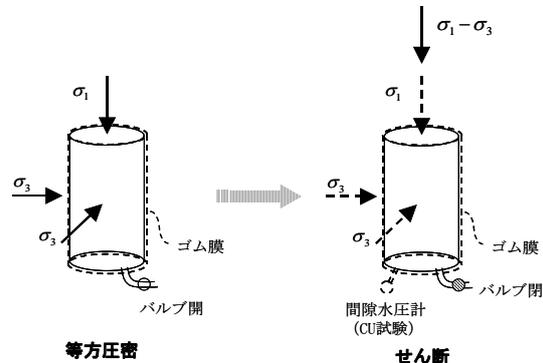


図 3.27 CU 条件での三軸試験の方法

(3) 圧密・排水条件(**CD 条件**: Consolidated Drained condition)でのせん断強度定数

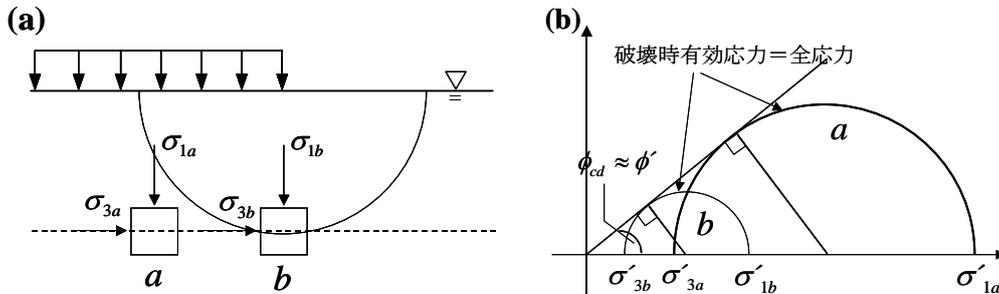


図 3.28 CD 条件での地盤中の土の要素のモール円と破壊包絡線

施工中は地盤は破壊せずに上載荷重による圧密が終了した後、荷重の増大により排水条件でせん断破壊する場合で、図 3.28 のように全応力のモール円を包絡する摩擦角  $\phi_{cd}$  が得られる。この場合、土は排水条件でゆっくりとせん断されるため、 $\Delta u = 0$  であり、したがって、 $\Delta \sigma' = \Delta \sigma$  であるため非排水条件での有効応力についての摩擦角  $\phi'$  に対し、 $\phi_{cd} \approx \phi'$  となる。ただし、砂礫のような土ではかなり密度が緩くても、CD 条件の破壊時には土の体積が膨張し、それによる余分な仕事（単位体積あたりの仕事＝直応力 体積ひずみ）が必要となる。このため、本来同じ値となるべき有効応力についての摩擦角  $\phi'$  と比べて  $\phi_{cd} > \phi'$  となる傾向があることが知られている。

このような破壊が起こる場合としては、砂礫のような透水性の良い地盤に支持力以上の荷重をかけたことなどによりせん断破壊する場合で、荷重増分により透水性の良い土は圧密が瞬時に終了し、そのあと排水条件でせん断破壊が起きると考える。

粘土の場合は、過圧密粘土の地盤上に荷重が載った場合や過圧密粘土の斜面が長期間かけて崩壊する場合などが対応する。すなわち過圧密粘土はせん断を受け

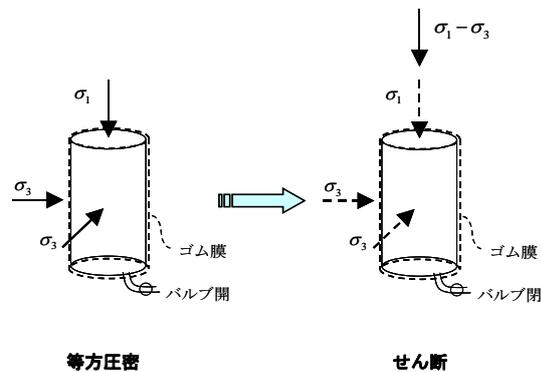


図 3.29 CD 条件での三軸試験の方法

るとダイレイタンスーにより膨張しようとするため、透水性の悪い粘土では間隙水圧が低下し、その差し引きで有効応力が上昇する。このため強度は大きくなり、短期的には破壊しないが、長期には水圧が逸散し強度が低下して破壊にいたる傾向があらわれる。このような条件に対応した土質試験を CD 試験と呼ぶ。CD 試験では図 3.29 に示すように圧密中もせん断中もバルブは解放されているため、過剰間隙水圧は発生せず、 $\sigma = \sigma' + u$  において、 $u = 0$  であるから、全応力と有効応力は常に等しい。

(4) 排水・非排水条件によるせん断強度のまとめ

以上の結果をまとめると：

- a) 土の破壊は破壊時点での有効応力により一義的に決まる。  
     ⇒ 有効応力強度定数； $c', \phi'$  で表示できる。
- b) しかし、透水性の小さな粘性土では非排水条件となり、せん断時のダイレイタンスーにより有効応力は変化するため、初期の有効応力だけで強度評価ができない。  
     これに対応するため、2つの方法がある。

全応力法：圧密・せん断に関する排水・非排水条件をなるべく実際の条件に合わせて、全応力（外荷重による応力）のみに着目した試験（UU 試験，CU 試験）を行い、それより得られた見かけの強度定数， $c_u$  または  $\phi_{cu}$  による安定計算を行う。

有効応力法：全応力の変化に応じて発生する過剰間隙水圧を評価し（例えば、スケンプトンの係数  $A$ ， $B$  により），全応力から有効応力を計算して， $c', \phi'$  による安定計算を行う。

- c) 実務的には全応力法によることが多い：  
     例えば、盛土の急速載荷による粘土地盤の安定性（ $c_u$ ）  
         粘土斜面の地震時安定性，など（ $c_{cu}, \phi_{cu}$ ）
- d) しかし、重要な工事についてはスケンプトンの係数  $A, B$  を用いた有効応力法や詳細な数値解析により、荷重の変化にともなう間隙水圧の変化を考えた有効応力解析を行う場合がある。また、地震時の砂地盤の液状化現象について数値解析を用いた有効応力による検討を行う場合がある。これは、砂地盤であっても地震のような載荷速度の早い現象に対しては、非排水条件となるためである。

3.8 粘土の非排水強度の深さによる増加割合（ $c_u / p'$ ）

非圧密・非排水せん断（UU）条件においては、非排水せん断強度（Undrained shear strength） $c_u$  による設計を行う。この  $c_u$  は地盤の初期状態の有効応力  $p'$  に依存するため、当然、深度により変化する。有効鉛直応力に対する非排水せん断強度  $c_u$  の割合は設計に用いる重要な値であり、図 3.30 を参照して以下の式により求められる。ここにおいて、有効応力  $p'$  としては一般に鉛直方向有効応力  $\sigma'_{10}$  または鉛直・水平方向の有効応力の平均  $p' = (\sigma'_{10} + \sigma'_{30}) / 2$  をとる。

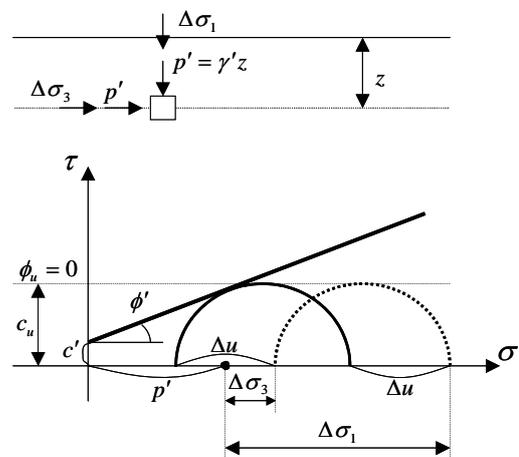


図 3.30 モール円と非排水せん断強度の関係

$$c_u = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi' + c' \cos \phi' \quad (3.30)$$

ここで、 $\sigma'_1 = p' + \Delta\sigma_1 - \Delta u$  と  $\sigma'_3 = p' + \Delta\sigma_3 - \Delta u$  を上式に代入すると、

$$c_u = \left( p' + \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3}{2} - \Delta u \right) \sin \phi' + c' \cos \phi' \quad (3.31)$$

ここで、間隙水圧係数  $B = 1.0$  とすれば、  
 $\Delta u = \Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$  であるので、

$$c_u = \{ p' + (1 - 2A)c_u \} \sin \phi' + c' \cos \phi' \quad (3.32)$$

したがって、

$$c_u = \frac{p' \sin \phi' + c' \cos \phi'}{1 + (2A - 1) \sin \phi'} \quad (3.33)$$

$$c_u / p' = \frac{\sin \phi'}{1 + (2A - 1) \sin \phi'} \left( 1 + \frac{c'}{p'} \cot \phi' \right) \quad (3.34)$$

一般に、正規圧密粘土では  $c' = 0$  であるので、次式の比の形で表される。

$$c_u / p' = \frac{\sin \phi'}{1 + (2A - 1) \sin \phi'} \quad (3.35)$$

これは、式(3.15)と等しい。

すなわち均質地盤で  $\phi'$  や  $A$  が一定であれば、 $c_u$  は地盤中の有効応力に比例して増加することになる。内部摩擦角  $\phi'$  に対する  $c_u / p'$  の値を間隙水圧係数  $A$  をパラメータにして図 3.31 に示す。  $A = 0.5 \sim 1.5$  の範囲で、 $\phi' = 20^\circ \sim 40^\circ$  に対して  $c_u / p' = 0.3 \sim 0.6$  の値が計算されることがわかる。

一般に、正規圧密地盤の深度方向の非排水せん断強度  $c_u$  の分布は、式(3.35)より  $p'$  が深度  $z$  にほぼ比例して増加するため図 3.32 のように直線関係となる。

過圧密の場合には式(3.34)において  $c' \neq 0$  なので、図 3.33 のように非排水せん断強度  $c_u$  は有効圧密応力  $p'$  の減少にしながら原点には近づかず、したがって、過圧密地盤の深度方向の非排水せん断強度は、ある深度より浅い範囲では地表に近づくほど  $c_u / p'$  は増加する傾向が見られる。一般に地盤は地表に近づくほど締め固めの影響などで過圧密になっていることが多いため、 $c_u$  は地表ではゼロとならず、図 3.33 のような特性を示すのが通例である。

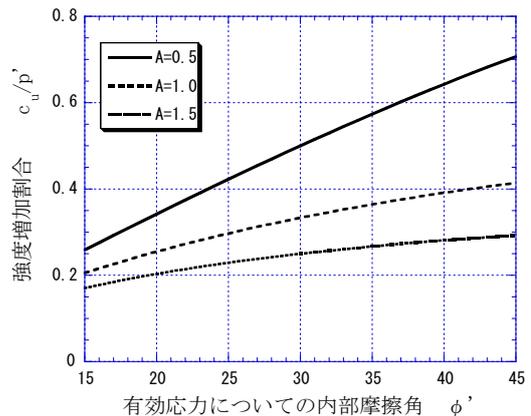


図 3.31 非排水せん断強度増加率と内部摩擦角の関係

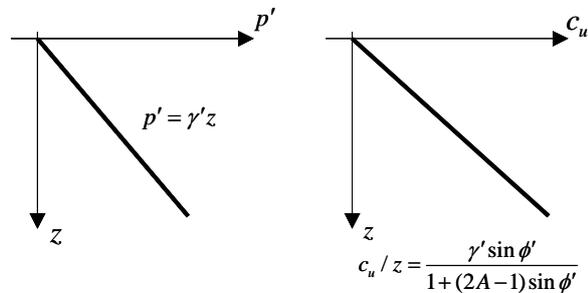


図 3.32 正規圧密粘土地盤での有効応力、非排水せん断強度の深度分布

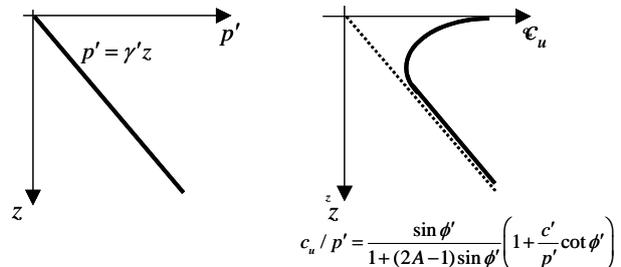


図 3.33 過圧密粘土地盤での有効応力、非排水せん断強度の深度分布

### 3.9 非排水強度を用いた粘土地盤の安定解析

盛土などの荷重による粘土地盤のせん断破壊に対する安定性を評価する方法として**円弧滑り面法** (Slip circle method) がある。図 3.34 に示すように、適当な円弧状の滑り面を仮定し、その円弧に沿った滑り**安全率**  $F_s$  を

$$F_s = M_r / M \quad (3.36)$$

で表す。ここに、分母の  $M$  は円弧上の土塊を滑らす滑動モーメントで、分子の  $M_r$  はそれに対抗する抵抗モーメントである。円弧の中心位置と半径を段階的に変化させて、 $F_s$  が最も小さな円弧を探し、 $F_s > 1.0$  の時は安定で、 $F_s < 1.0$  の時はその円弧に沿って破壊すると考えるのである。

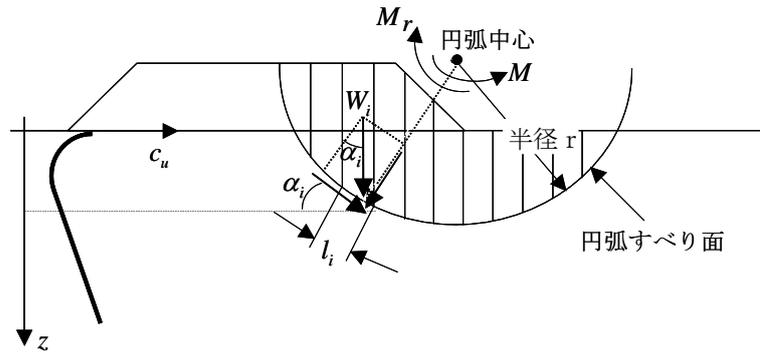


図 3.34 粘土地盤の安定解析で用いる非排水せん断強度の深度分布

計算の簡便化のために、円弧上の土塊は鉛直面により多数 ( $n$  個) の要素にスライスされ、要素ごとの自重による滑り面上の応力と土のせん断強度により滑動モーメント  $M$  と抵抗モーメント  $M_r$  を計算する。実際は連続体である土を要素に分けて近似的な力の釣り合いを仮定し滑り面上の応力を計算するが、その近似方法にはいくつかの種類がある。ここでは、もっとも単純なスウェーデン法 (フェレニウス法とも言う) により計算方法を説明する。

スウェーデン法にしたがい、円弧の中心周りの滑り円弧に沿っての抵抗モーメント  $M_r$  と回転モーメント  $M$  の比により滑り安全率  $F_s$  を求める。

$$\text{滑動モーメント } M = \sum_{i=1}^n (W_i \sin \alpha_i) \cdot r \quad (3.37)$$

$$\text{抵抗モーメント } M_r = \sum_{i=1}^n (W_i \cos \alpha_i \tan \phi_i + c_i l_i) \cdot r \quad (3.38)$$

ここに、記号は各要素の自重  $W_i$ 、内部まさつ角  $\phi_i$ 、粘着力  $c_i$ 、各要素での円弧の長さ  $l_i$ 、円弧が水平面となす角度  $\alpha_i$  であり、 $i$  は要素番号で、 $1 \sim n$  の値をとる。したがって、

$$F_s = \frac{\sum (W_i \cos \alpha_i \tan \phi_i + c_i l_i) \cdot r}{\sum (W_i \sin \alpha_i) \cdot r} = \frac{\sum (W_i \cos \alpha_i \tan \phi_i + c_i l_i)}{\sum (W_i \sin \alpha_i)} \quad (3.39)$$

さて 3.7 節(1)で述べたように、正規圧密粘土の上に盛土を載荷する場合、UU 条件すなわち非排水条件を考える必要があり、非排水強度  $c_u$  を用い、見かけ上、内部摩擦角はゼロとなる。したがって、 $\phi_i = 0$ 、 $c_i = c_{ui}$  であるから、式(3.39)は次式のように簡単な形となる。

$$F_s = \frac{\sum(c_{ui}l_i)}{\sum(W_i \sin \alpha_i)} \quad (3.40)$$

すなわち、各深度ごとの  $c_{ui}$  のみを用いて、滑り安全率が計算できる。この時に各深度ごとの  $c_{ui}$  として図 3.32, 図 3.33 に示すような非排水せん断強度の分布を用いることになる。

### 3.10 せん断試験の応力経路 ( $p \sim q$ 面) 表示

3.7 節において、土のせん断強度と排水・非排水条件の関係を三軸試験とモールの応力円を用いて考えた。しかし、モールの応力円は 2 次元応力状態しか表示できないため、その表現力には限界がある。ここでは三軸試験での 3 次元応力状態を表現できる応力経路 (Stress path) の  $p \sim q$  面表示を用いて、土のせん断強度にあたる排水・非排水条件の影響をもう一度検討してみよう。

応力経路の  $p \sim q$  面表示では、三軸試験での応力状態を  $p$  または  $p'$  (平均主応力または有効平均主応力) と  $q$  (軸差応力) を縦軸と横軸にとった平面で表す。

$$\text{平均主応力: } p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3) / 3 \quad (3.41)$$

$$\text{軸差応力: } q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (3.42)$$

式(3.12)のモールクーロンの破壊線の式  $\sigma'_1 - \sigma'_3 = (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \phi' + 2c \cos \phi'$  は、 $c = 0$  の場合

$$\sigma'_3 / \sigma'_1 = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} \quad (3.43)$$

と書ける。したがって、 $c = 0$  のときの破壊線の  $p \sim q$  平面上での表示は次式となる。

$$q / p' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{(\sigma'_1 + 2\sigma'_3) / 3} = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (3.44)$$

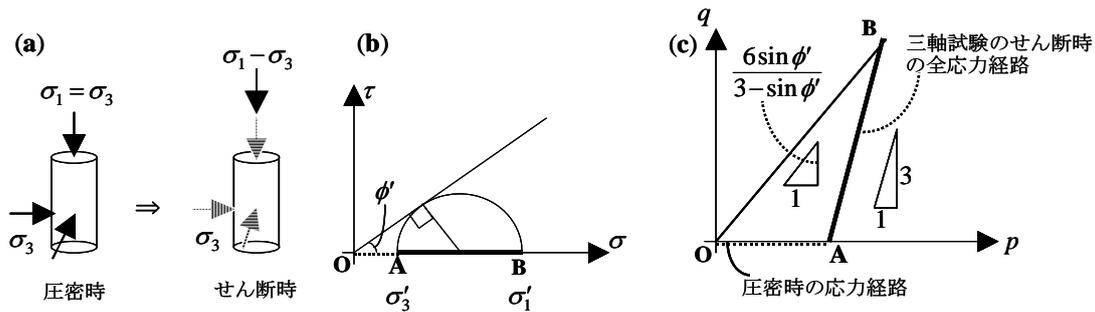


図 3.35 三軸試験の応力状態 (a) のモール円表示 (b) と  $p \sim q$  面表示 (c)

また、三軸圧縮試験では、図 3.35(a) のように等方圧密時は 3 方向から同じだけ応力を増加させ、 $\sigma_1 = \sigma_3$  なので、 $\Delta p = \sigma_3$ 、 $\Delta q = 0$  であり、図 3.35(b)(c) に示すように、この間の変化は OA となる。一方、せん断時は  $\sigma_3 = \text{一定}$ 、 $\sigma_1 \rightarrow \text{大}$  なので  $\Delta q = \sigma_1$ 、 $\Delta p = \sigma_1 / 3$  であり、したがって、 $\Delta q / \Delta p = 3$  すなわち、全応力経路は勾配が 3 の直線 AB の上をたどることが分かる。

つぎに、この平面上で以前に述べた CU, CD の各三軸試験条件の応力経路を表してみよう。図 3.36(a) は、正規圧密粘土あるいは緩い砂のような軟弱な土の場合の応力経路を示している。等方圧密 OA の後、全応力経路は勾

配3の破線 AB の経路をたどろうとする。もし、CD 試験であれば間隙水圧は発生しないので、 $\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u$  において、 $\Delta u = 0$  であるから、 $\Delta\sigma = \Delta\sigma'$  である。したがって、全応力経路=有効応力経路 となって、有効応力が有効応力についての破壊線とぶつかる点 B で土は破壊する。

しかし等方圧密の後、非排水条件でせん断する CU 試験の場合には、緩い土ではダイレイタンスにより正の間隙水圧が発生するため、その分有効応力が減少し、有効応力経路は AC' の実線の経路をたどり、C' で破壊線とぶつかって破壊にいたる。このとき全応力は破線 AC の経路をたどっており、破線と実線の差は発生する間隙水圧の大きさを表すことになる。結局、グラフの縦軸の大きさ（軸差応力）から分かるように、緩い土の場合は、排水強度が非排水強度より大きくなるわけである。

一方、図 3.36(b)は過圧密粘土や密な砂のような硬い土を等方圧密後、せん断する場合の応力経路を示している。圧密排水(CD)試験では図 3.36(a)と同様に破壊線とぶつかる点 B で土は破壊するのに対し、圧密非排水試験 (CU) 試験ではせん断により土が膨張しようとして負の間隙水圧が発生し、有効応力が増加して実線 AB' のような有効応力経路をたどることになり、点 C に至って破壊する。したがって、密な土の場合は非排水せん断強度の方が排水強度より大きなせん断強度となることが分かる。

以上から分かるように、 $p \sim q$  平面表示により载荷にともなう土の有効応力や間隙水圧の変化が明瞭に表示でき破壊までの過程が表せるため、静的荷重はもちろん地震時の液状化などによる地盤の安定性の検討によく用いられている。

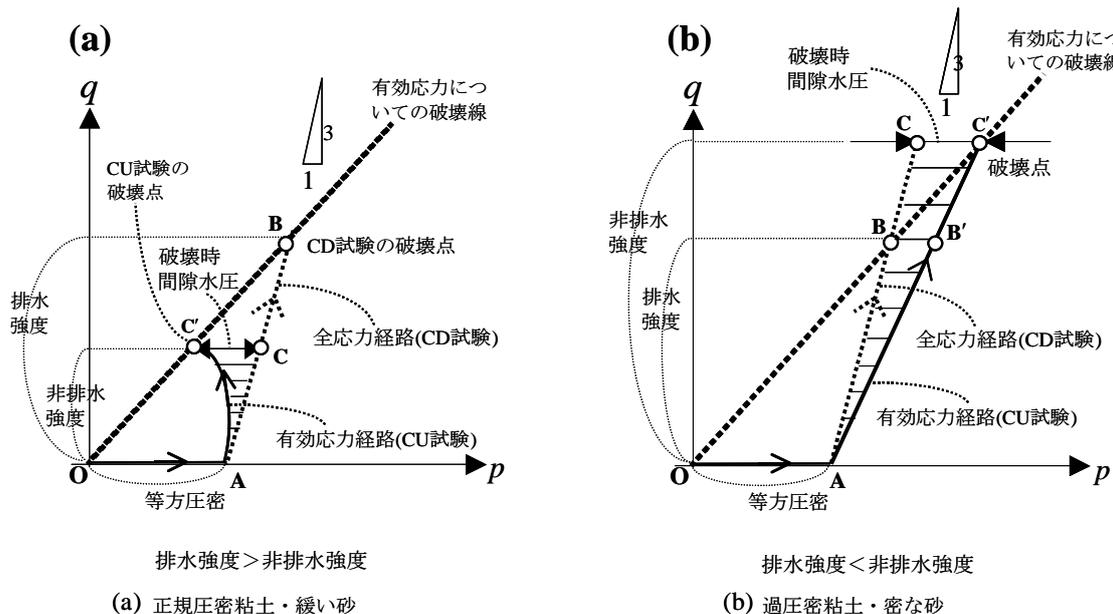


図 3.36 正規圧密粘土・緩い砂 (a), 過圧密粘土・密な砂 (b) の  $p \sim q$  平面での応力経路

### 3.11 原地盤でのせん断強度の簡易評価法

さて、本章でここまで述べてきたように、地盤の支持力や滑り破壊に対する安定性を評価するためには土のせん断強度を測定する必要がある。通常の建設工事での実務では原地盤から採取した試料により上記の三軸試験などの土質試験を行う代わりに、原地盤においていろいろな**原位置試験**（**サウンディング**: Sounding と呼ばれる）を行って、その結果から直接、強度定数やその他の設計定数を評価式やグラフなどを用いて推定する手段がとられることが多い。以下においては、頻繁に用いられる原位置試験法を簡単に紹介する。

### (1) 標準貫入試験 (Standard penetration test: SPT)

我が国でもっとも普及している試験法。ほとんど全ての設計定数と関係づけられている。

N値を求める方法：ボーリング孔を掘りながら、1 m掘り進むごとに孔の先端部から地盤に向かって図 3.37 に示すような試験を行う。

**N値**：ボーリング孔内で先端部を 30cm 貫入させるのに必要なハンマーの打撃回数。

長所：先端部に**サンプラー**(二つ割りの土の採取チューブ) がついているので、土質が目で判定できる。

短所：深さ 1m ごとに 1 回の試験しかできず、連続的データが得にくい。孔内の水位を地盤の地下水位より大きく低下させることなどにより地盤がみだれてしまうなど、技術者の技量により結果が左右されやすい。また、粘性土に対してはN値が3程度以下の小さな値となり、物性値の評価精度が得られないため、この試験は用いるべきでない。

このように問題を多く含む試験法であり、現状ではこれまでの経緯からよく用いられてきたが、これからは粘性土については次に述べる静的コーン貫入試験を、非粘性土については連続的に実行する動的貫入試験などを行うことが望ましい。

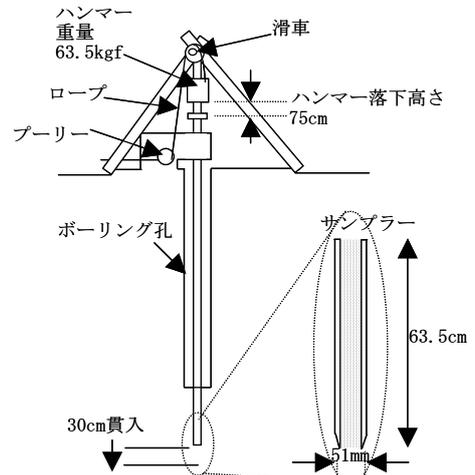


図 3.37 標準貫入試験の概要

### (2) 静的コーン貫入試験 (Cone penetration test: CPT)

欧米で最近普及が進んでいる試験法。以前から用いられてきたダッチコーン試験とコーン先端での電気計測を取り入れた3成分コーン試験がある。円錐形の先端部を地表から直接ジャッキで静的に一定速度で押し込む。そのときの先端抵抗  $q_t$  値 (先端抵抗力/断面積) を求める。

長所：連続した  $q_t$  値がえられ、地盤の精密な構造が捉えられる。ボーリング孔が不要であり、乱れの影響がない、連続的な貫入抵抗値が得られる。

短所：土質の観察ができない。しかし、最近の3成分コーンでは先端部の抵抗と側面の摩擦抵抗を同時に電気計測することにより、土質を判定することが可能である。硬い地盤では静的な貫入が容易でないため、適用土質が、粘土や緩い砂質土など柔らかい地盤に限られる。

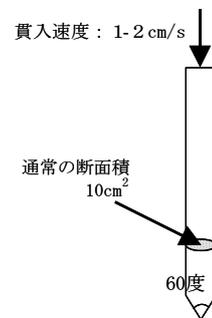


図 3.38 静的コーン貫入試験の概要

### (3) スウェーデン貫入試験 (Swedish penetration test)

大がかりな装置のいらない、人力のみで可能な試験。錐の様な細い先端部を錘の重量の下で回転貫入させる。N値との相関式により、N値に変換して用いる。

(4) **ベーンせん断試験** (Vane shear test)

上記の他の試験のように貫入抵抗から間接的に物性を評価するのとは異なり、土の原地盤での非排水せん断強度を直接計測できる試験法である。ただし、軟弱な粘土のみにしか適用できない。断面が十文字の翼 (vane) を軟弱粘土に押し込み、回転せん断する。破壊時の回転トルクから回転円筒の表面積を使って非排水せん断強度を求めることができる。

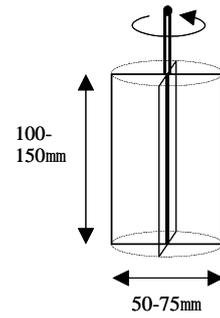


図 3.39 ベーンせん断試験の概要

## 4 土圧

### 4.1 土圧の基本的性質

**土圧** (Earth pressure) とは、通常、構造物に作用する水平土圧のことを指し、土が水平方向に及ぼす応力を言う。しかし、実務的には土圧が構造物に及ぼす土圧合力を「土圧」と呼ぶ場合も多い。ここでは**土圧合力**を、土圧合力=土圧×受圧面積 として、用語を厳密に区別している。土留擁壁、根切り山留壁、地中構造物などの設計に用いる作用外力としてその評価が重要である。

また、以下では擁壁 (Retaining wall) に加わる土圧について考えるが、擁壁の裏込め土 (Backfill) は排水のよい土を使い地下水面がないことが原則であり、通常は間隙水圧は発生しないようにしている。したがって通常は、全応力=有効応力 として話を進めることとする。

土圧は図 4.1 に示すように、地盤の変位状態に応じて以下の 3 種類に分けて考える：

静止状態：**静止土圧** (Earthpressure at rest)

主働極限状態：**主働土圧** (Active earthpressure)

受働極限状態：**受働土圧** (Passive earthpressure)

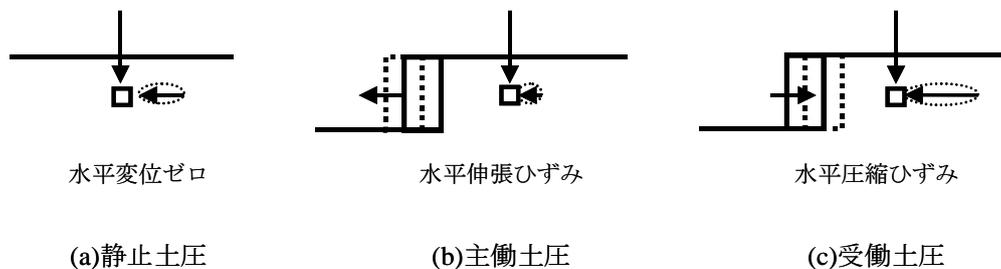


図 4.1 上載荷重下の土の要素の圧密・圧縮変形とせん断変形

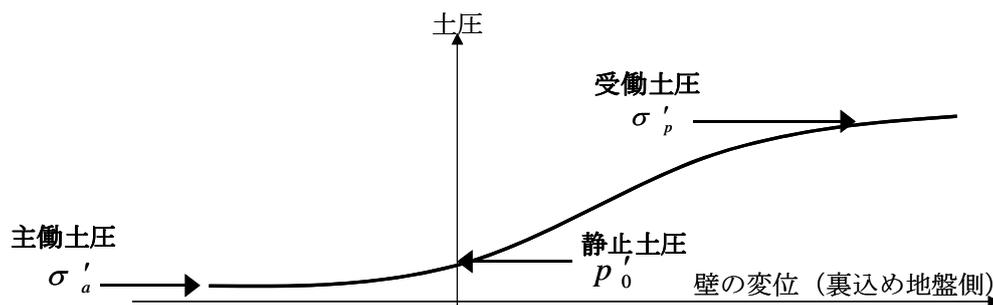


図 4.2 擁壁の変位と土圧の関係

すなわち、擁壁と隣接地盤との相対変位によって、3種類の土圧は図 4.2 に示すように整理される。擁壁が完全に不動である場合は静止土圧であり、変位がマイナス（擁壁が背後地盤から遠ざかる）の方向に向かうほど主働土圧に収束し、反対に変位がプラスの方向に増加するほど受働土圧に収束する。土圧の絶対値の大きさの順序は、主働<静止<受働 であり、静止状態から主働状態に達するまでの相対変位はわずかであるが、受働状態に達するまでには大きな相対変位を要する。

静止土圧と異なり、主働・受働土圧は擁壁の背後地盤が破壊し塑性状態になった時の土圧であり、それを求めるためには地盤の塑性釣り合い状態を考える必要がある。そのためにランキン土圧 (Rankine earthpressure) とクーロン土圧 (Coulomb earthpressure) という二種類の評価法が使われている。

ランキン土圧：擁壁の背後地盤の土の微小要素が受ける応力状態とモールクーロンの破壊基準との関係より破壊状態での土圧を導く。理論的に厳密であるが、背後地盤の境界条件が単純でなければならない。

クーロン土圧：擁壁の背後地盤のくさび状の土塊が限界釣り合い状態となるとの仮定から破壊限界時の土圧を導く。理論的にはあまり厳密ではないが、複雑な形状の問題に対応できる現実的な方法である。

いずれの土圧も、後に述べるように 土圧 = 鉛直有効応力 (鉛直土圧) × 土圧係数 の形で表される。

一方、擁壁背後地盤に地下水位があり、水圧が作用する場合には、地下水面からの鉛直有効応力から計算した静水圧を上記の土圧に加えあわせる必要がある。

以下に、静止土圧、ランキンの主働・受働土圧、クーロンの主働・受働土圧の順で述べる。

## 4.2 静止土圧

よう壁が完全に地盤に対して不動である場合に働く静止土圧  $p_0'$  は、均質水平地盤の側方の変位が拘束された状態にある時に発揮される土圧 (1.5 節で述べた) と同じである。 $p_0'$  は鉛直有効応力  $\sigma_v'$  に静止土圧係数  $K_0$  を乗ずることにより算定。

$$p_0' = K_0 \sigma_v' \quad (4.1)$$

地盤を等方弾性体としたときは  $K_0 = \frac{\nu'}{1-\nu'}$  ( $\nu'$  は排水状態の有効応力で定義されるポアソン比) となる。

実務では、正規圧密地盤については、内部摩擦角  $\phi'$  から実験式

$$K_0 = 1 - \sin \phi' \quad (4.2)$$

により推定する場合がある。

## 4.3 ランキンの主働・受働土圧

よう壁の背後地盤の土の微小要素が受ける応力状態とモールクーロンの破壊基準との関係より破壊状態での土圧を導く。図 4.3 のように、鉛直応力  $\sigma_v'$  をうける土の要素について：

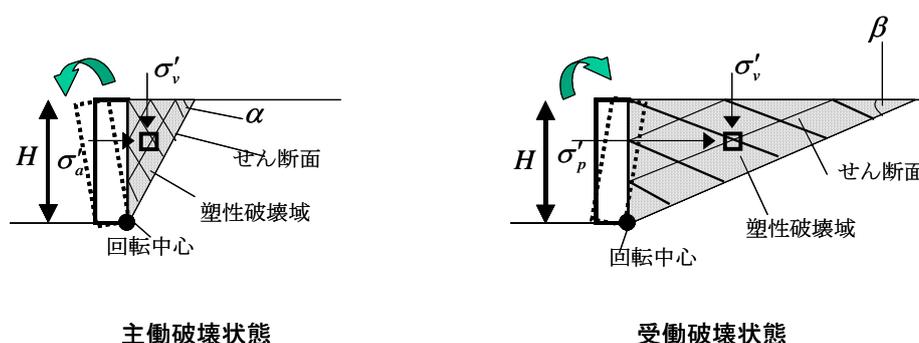


図 4.3 擁壁の変位と土圧の関係



と置くと、 $\sigma'_a$ と $\sigma'_p$ は次式の形で表される。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_a \\ \sigma'_p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} K_a \\ K_p \end{array} \right\} \sigma'_v \mp 2c' \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{K_a} \\ \sqrt{K_p} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

せん断面の角度は、モールの応力円より以下のようになることが分かる。

$$\text{主働極限状態では最大主応力面（水平面）から } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \quad (4.9)$$

$$\text{受働極限状態では最小主応力面（水平面）から } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \quad (4.10)$$

$\sigma'_a$ と $\sigma'_p$ は鉛直有効応力 $\sigma'_v$ の1次関数であり、背後地盤が均質であれば、 $\sigma'_v = \gamma_t Z$ と表せるので、深さに対して直線的に増加することが分かる。そこで、高さ $H$ のよう壁に作用する土圧合力は次式で計算される。

$$\left. \begin{array}{l} P_a \\ P_p \end{array} \right\} = \int_0^H \left[ \left\{ \begin{array}{l} K_a \\ K_p \end{array} \right\} \gamma_t Z \mp 2c' \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{K_a} \\ \sqrt{K_p} \end{array} \right\} \right] dZ = \frac{1}{2} \gamma_t H^2 \left\{ \begin{array}{l} K_a \\ K_p \end{array} \right\} \mp 2c'H \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{K_a} \\ \sqrt{K_p} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

主働土圧合力 $P_a$ について見ると、図4.5のようにそれが正になるのは

$$P_a = \frac{1}{2} \gamma_t H^2 K_a \mp 2c'H \sqrt{K_a} \geq 0 \quad (4.12)$$

であり、

$$H > H_c = \frac{4c'}{\gamma_t \sqrt{K_a}} \quad (4.13)$$

でない限りは、よう壁への主働土圧は粘着力により受け持たれ、正の値にはならないことになる。

$c' = 0$ の場合には、よう壁に働く土圧は三角形分布となり、合力の作用点はよう壁高さの2/3のところになる。

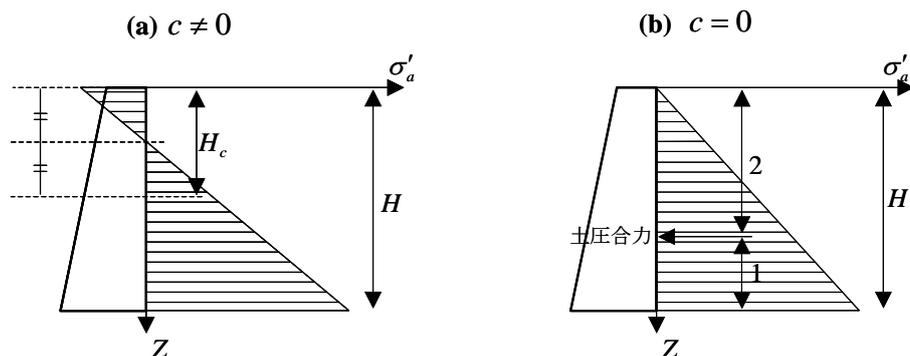


図 4.5 ランキンの主働土圧の深度分布と限界高さ  $H_c$

#### 4.4 クーロンの主働・受働土圧

クーロン土圧ではくさび形の滑り土塊の極限釣り合い条件により土圧合力 $P_a$ を算出する。ランキン土圧と異なり、地盤の傾斜 $\beta$ 、よう壁背面の傾斜 $\omega$ 、よう壁背面と地盤との間の摩擦角 $\delta$ （一般に、土同士の内摩擦角 $\phi'$ よりも小さい値をとるとされている）を考慮できる。以下では、くさび形土塊の背面の水平面となす角度 $\alpha$ を未知数と考える。なお、粘着力 $c' = 0$ と仮定する。

(1) クーロン主働土圧合力

主働土圧の場合、図 4.6 に示すようなくさび形の滑り土塊の自重  $W$  が下にずり落ちようとするのを、よう壁からの反力（これは主働土圧合力と絶対値が等しい反作用力である） $P_a$  と滑り土塊と接する安定地盤からの反力  $R_a$  により支えようとして、極限釣り合い状態になっていると考える。

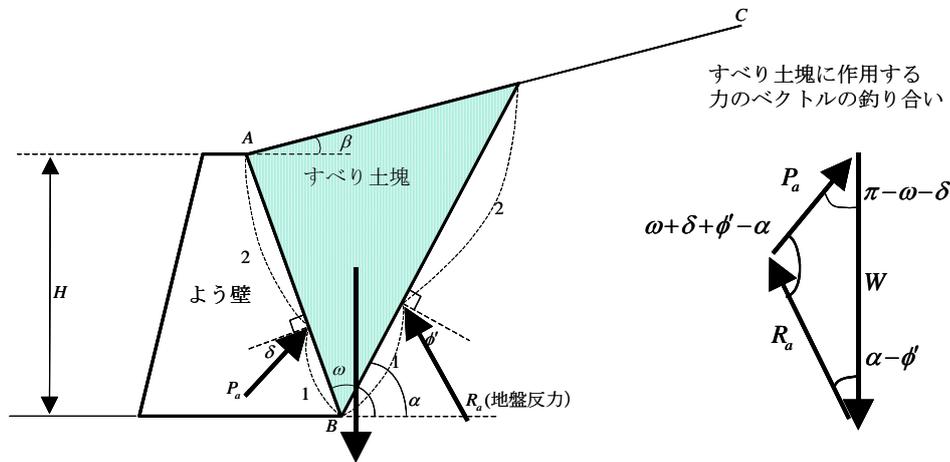


図 4.6 クーロンの主働土圧で滑り土塊に働く力の釣り合い

この場合、自重の着力点は土塊 ABC の重心位置で、鉛直下向きである。反力  $P_a$  と  $R_a$  については、辺 AB, BC に土圧が深さに比例した三角形分布で働いているとの仮定により、辺長の上から 2/3 のところを着力点と考える。反力  $R_a$  の作用方向については、土塊が滑る間際の極限状態で釣り合っていることから、反力ベクトルは接触面に立てた垂線（法線）と内部まさつ角  $\phi'$  で交わることになる。なぜなら、図 4.7 に示すように極限状態ではモールの応力円と破壊線が点 P で接するが、この場合、面に垂直な力  $QP$  と平行な力  $RP$  との合成ベクトルが面に働く合力  $OP$  であり、それは垂直力  $QP$  と内部まさつ角  $\phi'$  をなすことから理解できる。すなわち一般的に、まさつ角  $\phi'$  の面ですべりが発生する限界状態では、その面に作用する合力がすべり面の法線となす角は  $\phi'$  となる。同様に、図 4.6 のよう壁と土塊の接触面 AB では反力  $P_a$  は法線と角  $\delta$  をなすことになる。

このようにして極限状態の土塊に働く 3 つの力のベクトル  $W$ ,  $R_a$ ,  $P_a$  が釣り合っていると考えると、これらのベクトルは図 4.6 の右側のように閉じた三角形を構成する必要があることが分かる（実際は、モーメントの釣り合いまで考えているわけでないで、あくまで近似的な釣り合いである）。三角形の各内角の値については、図 4.6 に示す値となることは、幾何学的に求められる。

したがって、三角形の辺長と対する角度の  $\sin$  との間に成り立つ関係式を用いて、主働土圧合力  $P_a$  は次式で表される。

$$P_a = \frac{\sin(\alpha - \phi')}{\sin(\omega + \delta + \phi' - \alpha)} W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\sin(\alpha - \phi') \sin(\omega - \alpha) \sin(\omega - \beta)}{\sin(\omega + \delta + \phi' - \alpha) \sin \omega \sin(\alpha - \beta)} \quad (4.14)$$

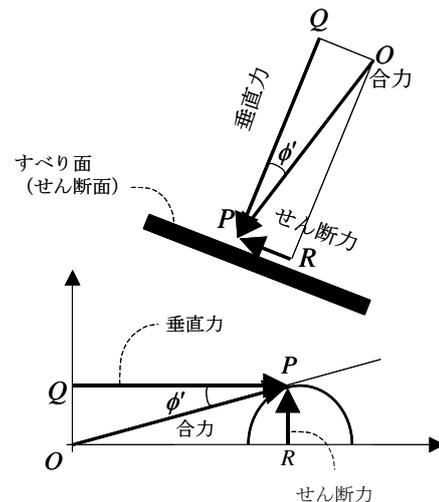


図 4.7 滑り面上の力のベクトル図

ここで、 $\frac{dP_a}{d\alpha} = 0$  の条件より  $P_a$  が最大となる角度  $\alpha$  を算出し、それを再び式(4.14)に代入することにより  $P_a$  を求めることができる。

(2) クーロン受働土圧合力

受働土圧の場合は、図 4.8 のように重さ  $W$  のくさび形すべり土塊 ABC がよう壁から横方向に押され上にずり上がろうとして、反力  $R_a$ 、 $R_a$  と極限釣り合い状態となっていると考える。この場合、反力  $R_a$ 、 $R_a$  が面 AC、面 AB の法線となす角度は  $\phi'$  と  $\delta$  であるが、土塊のずり上がりに抵抗するために、法線となす角度の向きは逆になっている。

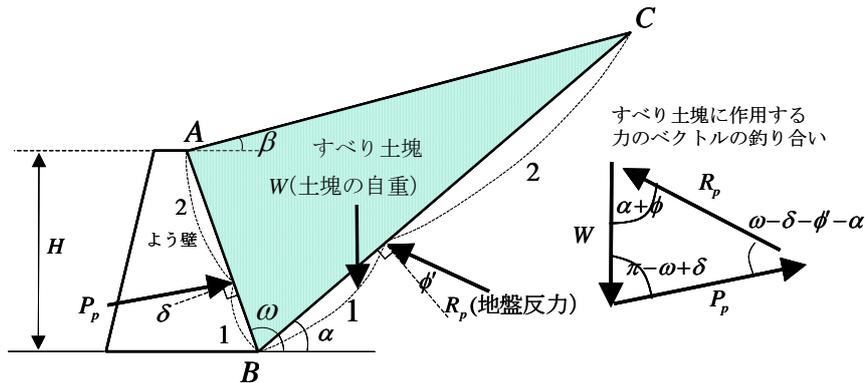


図 4.8 クーロンの受働土圧すべり土塊に働く力の釣り合い

主動土圧の場合と同様に、力の釣り合い条件から、図 4.8 の右側のベクトル図が組み立てられ、受働土圧合力  $P_p$  は次式により表される。

$$P_p = \frac{\sin(\alpha + \phi')}{\sin(\omega - \delta - \phi' - \alpha)} W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\sin(\alpha + \phi') \sin(\omega - \alpha) \sin(\omega - \beta)}{\sin(\omega - \delta - \phi' - \alpha) \sin \omega \sin(\alpha - \beta)} \quad (4.15)$$

$\frac{dP_p}{d\alpha} = 0$  の条件より  $P_p$  が最小となる角度  $\alpha$  を算出し、それを再び式(4.15)に代入することにより  $P_p$  を求めることができる。結局、上記の式(4.14)(4.15)にそれぞれの極値を与える角度  $\alpha$  を代入することによりクーロン土圧は計算でき、次式の形にまとめられる。

$$\left. \begin{matrix} P_a \\ P_p \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left\{ \begin{matrix} K_a \\ K_p \end{matrix} \right\} \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{matrix} K_a \\ K_p \end{matrix} \right\} = \frac{\sin^2(\omega \mp \phi')}{\sin^2 \omega \sin(\omega \pm \delta) \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \sin(\phi' \mp \beta)}{\sin(\omega \pm \delta) \sin(\omega - \beta)}} \right]^2} \quad (4.17)$$

ここで、 $\omega = \pi/2$ 、 $\delta = 0$ 、 $\beta = 0$  と置くと、上式は

$$\left\{ \begin{matrix} K_a \\ K_p \end{matrix} \right\} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \mp \phi'\right)}{(1 \pm \sin \phi')^2} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi'}{2}\right) \quad (4.18)$$

となり、ランキン土圧係数の式(4.7)に一致する。

#### 4.5 主働土圧に対するよう壁の安定計算

ここで、少し実務的な設計の話をしてみよう。よう壁はどこにでも見られるごくありふれた構造物であり、主働土圧を考えたその設計法は地盤工学の基礎知識のひとつである。

よう壁の安定性の評価は、(1)滑動に対する安定、(2)転倒に対する安定、(3)支持力に対する安定 の三つからなっている。この考え方は、基本的に地表に建設するダムや建物など底面が地盤に接する構造物の鉛直・水平荷重に対する安定性を考える場合の共通の考え方であり、理解しておくことが重要である。

図 4.9 に示すように、よう壁に働く力として、自重  $W$ 、主働土圧合力  $P_a$  の他、よう壁が根入れされている場合、前面にある埋め戻し土の受働土圧合力  $P_p$  があげられる。

##### (1) 滑動に対する安定

鉛直・水平方向の力の釣り合いを考える。鉛直方向は添字  $v$ 、水平方向は添字  $h$  をつけて表すと、

鉛直方向力： $N$

$$N = W + P_{av} - P_{pv} \quad (4.19)$$

水平方向力： $H$

$$H = P_{ah} - P_{ph} \quad (4.20)$$

$N$  はよう壁底面が接地面におよぼす接地圧の合力であり、 $H$  はせん断応力の合力である。この  $N$  と  $H$  により滑動が起きないための安全率  $F_s$  はよう壁底面と土の間の摩擦係数を  $\mu$  とした場合次式で表すことができ、一般に 1.5 以上とすることになっている。

$$F_s = \frac{\mu N}{H} \geq 1.5 \quad (4.21)$$

ここに、 $\mu$  としては、条件により以下の値をとることが多い。

$$\mu = \tan \delta = 0.6$$

(岩とコンクリートの間で良くとられる値)

$$\delta = \phi' \quad (\text{場所打ちコンクリート})$$

$$\delta = 2\phi'/3 \quad (\text{プレキャストコンクリート})$$

##### (2) 転倒に対する安定

a 法と b 法の 2 つの計算法があるが、このうち b 法は種々の問題で登場する重要な考え方である。

**a 法** 図 4.9 の点 A の周りの抵抗モーメント  $M_r$  と転倒モーメント  $M_a$  の比で次式により定義する。安全率  $F$  は一般に 1.5 以上とすることが多い。

$$F = \frac{M_r}{M_a} \geq 1.5$$

(4.22)

**b 法** 底面の合力作用点が middle third (中央 1/3) に入っていることで判定：

図 4.9 に示すように、底面の合力作用点の位置を点 A から  $d$  の距離とすると、

$$d \cdot N = M_r - M_a \quad \Rightarrow \quad d = \frac{M_r - M_a}{N} \quad (4.23)$$

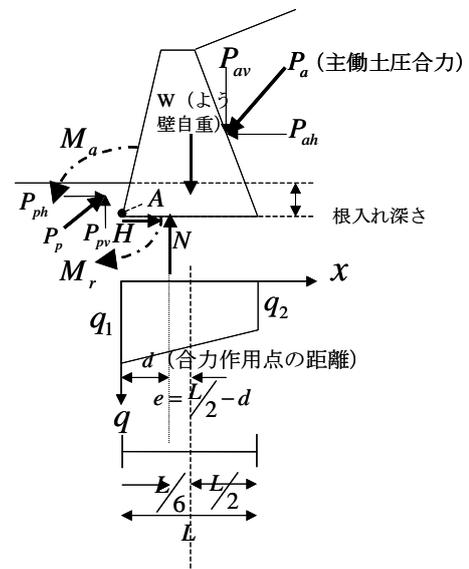


図 4.9 擁壁に働く力の釣り合いと底面接地圧分布

底面の圧力分布を図 4.9 に示すように  $q = \frac{q_2 - q_1}{L}x + q_1$  で表す. ここに端部の圧力を  $q_1, q_2$  ( $q_1 \geq q_2$ ) とする.

$$N = \int_0^L q dx = \frac{q_1 + q_2}{2}L \quad (4.24)$$

$$d \cdot N = \int_0^L qx dx = \frac{q_1 + 2q_2}{6}L^2 \quad (4.24')$$

これより,

$$e = \frac{L}{2} - d \quad (4.25)$$

として

$$q_1 = \frac{N}{L^2}(4L - 6d) = \frac{N}{L} \left(1 + \frac{6e}{L}\right), \quad q_2 = \frac{N}{L^2}(6d - 2L) = \frac{N}{L} \left(1 - \frac{6e}{L}\right) \quad (4.26)$$

よう壁が転倒しないためには当然端部が浮き上がらなければよいわけで, つまり ( $q_2 \geq 0$ ) であればよい.

$$1 - \frac{6e}{L} \geq 0 \quad \text{したがって,}$$

$$e \leq L/6 \quad (4.27)$$

すなわち, 底面の合力作用点が中央 1/3 (middle third) に入っていれば, 底面圧力は負になることはなく, したがって, 転倒は絶対に生じないことがわかる. よう壁に限らず, 構造物の転倒に対する安定性の簡便な判定法としてこの中央 1/3 法 (middle third 法) が使われることが多い.

### (3) 支持力に対する安定

基礎地盤に最も大きな圧力がかかるのは図 4.9 から明らかなようによう壁底面の外側端部で, その大きさは式

(4.26)の  $q_1$  で表される. したがって, その値が許容支持力  $q_a$  を越えないことが支持力安定性の条件となる.

$$q_1 = \frac{N}{L^2}(4L - 6d) = \frac{N}{L} \left(1 + \frac{6e}{L}\right) \leq q_a \quad (4.28)$$

この場合, 安全率  $F$  は許容支持力  $q_a$  を極限支持力から算出する次式に含まれることになる.

$$q_a = q_u / F \quad (4.29)$$

一般に  $F$  は常時荷重に対して 3.0 をとる.

## 4.6 たわみ性よう壁での土圧

ここまで述べてきたよう壁に加わる主働・受働土圧の問題では, よう壁は下部を回転中心として前後に倒れる変位モードの時に, 理想的なランキン主働・受働土圧が生じるとしている. 実際のよう壁ではこのような単純な場合だけでなく, 種々の変位モードが想定される. とく

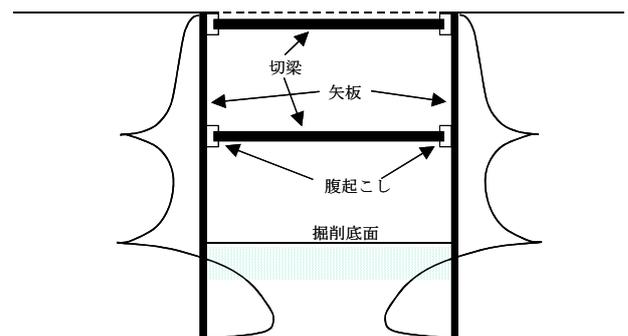


図 4.10 たわみ性土留め擁壁の土圧分布の概念

に、土留めよう壁が鉄筋コンクリート製の剛体ではなく図 4.10 のような鋼矢板からなる場合、それ自身がたわみ変形をおこすため複雑な土圧が発生することになる。

このようなたわみ性よう壁に働く土圧は、コンピューターを用いた地盤とよう壁構造の相互作用を考えた弾塑性解析によることになる。ただし、定性的には、図 4.11 に示すように、主働・静止・受働の各変位モードの重ね合わせによって、どのような傾向の土圧分布となるかはある程度は推定できる。

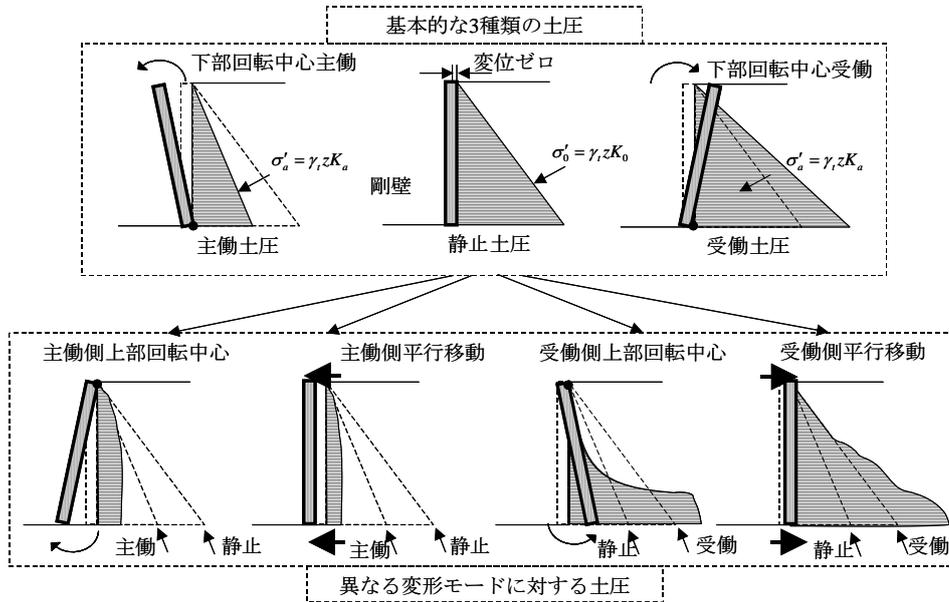


図 4.11 擁壁の変形モードと土圧分布の定性的傾向

## 5. 地盤中の水の流れ

前章までは、地盤を構成する土と水の力の釣り合いを扱ってきたが、本章では地盤中の水の流れについて考える。地盤を掘ると地下水面が現れ、その下は土が飽和している。地下水は静止していることはなく、上の不飽和層から雨水が供給されたり、周辺地盤からの流入・流出によって、透水層中を常にゆっくりと流れている。ここではこの地下水の流れ方について考える。

### 5.1 ダルシーの式

地下水流は通常、きわめて低速であり、層流状態で流れている。定常状態の層流はベルヌーイの式により表せる。

$$\frac{1}{\gamma_w} \frac{dp}{ds} + \frac{dz}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dh_r}{ds} = 0 \quad (5.1)$$

ここに、**図 5.1** を参照して、 $\gamma_w$  = 水の単位体積重量、 $s$  = 流線に沿っての距離、 $p$  = 水圧、 $z$  = 高さ、 $v$  = 流速、 $h_r$  = 水頭損失、 $g$  = 重力加速度 である。一般に地下水の流速  $v$  はきわめて小さいため、上式の第3項目は無視しうるので、これを積分することにより、

$$\frac{p}{\gamma_w} + z + h_r = h_0 \quad (5.1')$$

ここに、 $s = 0$  の時の水頭を  $h_0$  とし、座標  $s$  における水頭損失を  $h_r$ 、水頭を  $h = h_0 - h_r$  とすると、結局

$$\frac{p}{\gamma_w} + z = h = h_0 - h_r \quad (5.2)$$

と表される。水頭損失  $h_r$  の流線距離  $s$  についての変化割合  $i = \frac{dh_r}{ds} = -\frac{dh}{ds}$  を動水勾配とよぶ。

もし、動水勾配  $i$  が一定であれば、水頭  $h$  は流線の距離  $s$  に比例して減少することになる。

動水勾配  $i$  と流速  $v$  を関係づける式としてダルシー (Darcy) の式

$$v = k \cdot i \quad (5.3)$$

がよくつかわれる。ここに、 $k$  = 透水係数 (速度の単位: 通常 cm/s を使うことが多い)、 $i = -\Delta h / \Delta s$  (動水勾配) である。ダルシー式は層流地下水流に非常によく当てはまる。ここに、流速  $v$  は土の断面積  $A$  を単位時間に流れる流量  $Q$  から  $v = Q / A$  によって計算される平均流速であり、粒子間隙を流れる水の実流速  $v_n$  は間隙率  $n$  を用いて

$$v_n = v / n \quad (5.4)$$

により表される。また、ダルシーの式(5.3)から流量については次式が得られる。

$$Q = k \cdot i \cdot A \quad (5.5)$$

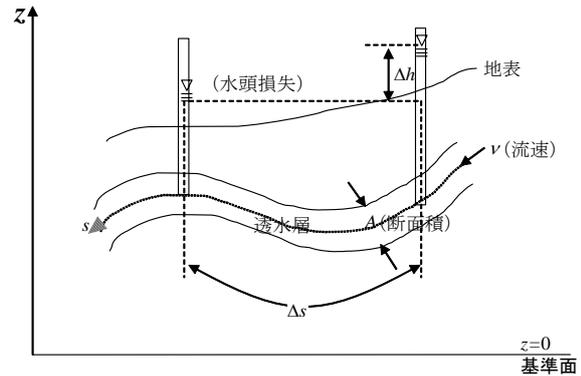


図 5.1 地下水流と水頭損失

## 5.2 透水係数への影響因子

透水係数  $k$  は式(5.5)からわかるように、土中の水の流れ易さに関わる重要な定数であるが、どのような因子が透水係数を左右しているかを、理論的に考えてみよう。

水理学で基礎的に学んだように、図 5.2 の半径  $a$  の円管を流れる層流の実流速  $v_n$  は次式で表される。

$$v_n = \frac{a^2}{8\mu} i \quad (\text{Poiseuille の式}) \quad (5.6)$$

ここに  $\mu$  は水の粘性係数である。図 5.3 の断面積  $A$ 、断面周長  $s$  の不規則形状の管路の場合は、円管の式(5.6)に  $A = \pi a^2$ 、 $s = 2\pi a$  から求められる  $a = 2A/s$  を代入すると、

$$v_n = \frac{(A/s)^2}{2\mu} i \quad (5.7)$$

ここでいよいよ土粒子の集合体を意識して、図 5.4 に示す間隙比  $e$ 、直径  $D$  の等しい  $N$  個の球の集合を考え、その空隙を断面積  $A$ 、周長  $s$ 、長さ  $L$  の等価な管路に置き換える。

$$\text{空隙体積: } AL = \frac{\pi D^3}{6} Ne$$

$$\text{周面積: } sL = \pi D^2 N$$

これより、 $A/s = De/6$

これを式(5.7)に代入すると、

$$v_n = \frac{(De)^2}{72\mu} i \quad (5.7')$$

$v_n$  は管路を流れる実流速であるので、全面積あたりの平均流速は

$$v = nv_n = \frac{e}{1+e} v_n = \frac{1}{72\mu} D^2 \frac{e^3}{1+e} i \quad (5.8)$$

この式は数々の大胆な簡略化を経て得られたものであり、 $1/72$  という値に大きな意味はないと考えて、定数  $c$  で置きかえると、結局、透水係数は定性的には次式で表されることが分かる。

$$k = v/i = \frac{c}{\mu} D^2 \frac{e^3}{1+e} \quad (5.9)$$

すなわち、 $k \propto D^2$ 、 $k \propto \frac{e^3}{1+e}$ 、 $k \propto 1/\mu$  であり、

透水係数には粒径  $D$  の影響が圧倒的に大きいことが明らかである。なぜなら、土粒子の直径  $D$  は土によって非常に幅の広い値をとる。たとえば、粘土はミクロン (1/1000mm) 程度、砂は 0.1~1mm 程度、礫は 10mm 程度と考えると、その 2 乗に比例する透

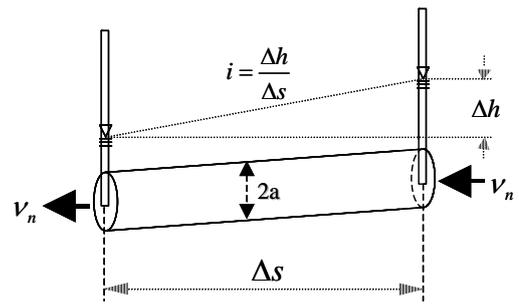


図 5.2 円管中の層流

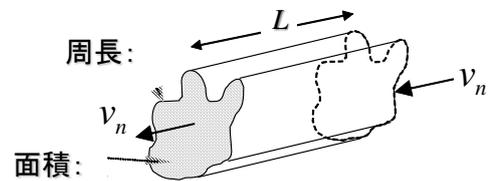


図 5.3 不規則形状の管路中の層流

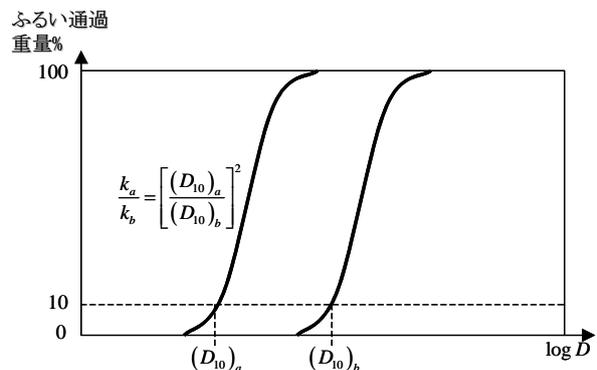
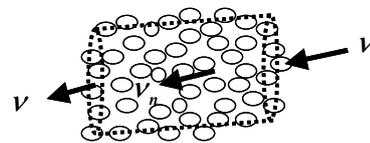


図 5.5 粒度分布と 10% 粒径

水係数への影響は、間隙比  $e$  の影響や粘性係数  $\mu$  の影響よりも格段に大きいことが容易に理解できる。

上記の式の展開では土は粒径  $D$  の等球からなるとして単純化した。しかし、実際の土はいろいろな粒径を含んでおり、その透水係数を推定する式として、次のハーゼン(Hazen)の式がよく用いられている。この式では、同じ土に含まれる粒径のうち、透水係数を支配するのは図 5.5 に示すように、粒度分布曲線の 10% 粒径  $D_{10}$  であるとしている。

$$k = \alpha(D_{10})^2 \quad (5.10)$$

粒度分布曲線は砂以上の粒径 (75 ミクロン以上) の土については、ふるい分け試験により、それ以下の土については沈降分析により求められる。横軸に土の粒径を常用対数軸にとり、縦軸にはその粒径以下の土の占める重量百分率を通常軸にとって表す。

### 5.3 透水係数の測定法

透水係数を測定する方法は室内試験、原位置試験に分けられ、土質の種類などによってさらにいくつかの試験法に分類される。

#### (1) 室内透水試験

##### 定水位透水試験：

図 5.6 に示すように、水位差を一定に保ち土の試料の中を通過する定常な流れをつくる。(5.5)を用いて、そのときの流量  $Q$ 、動水勾配  $i = h/L$ 、断面積  $A$  から

$$Q = kiA = k \frac{h}{L} A \quad (5.11)$$

であるから、

$$k = \frac{L}{Ah} Q \quad (5.11')$$

によって透水係数が求められる。この試験法ではある程度流量が大きいことが必要であり、透水係数の大きい砂・礫に適用される。

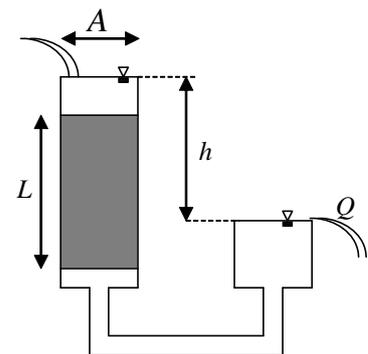


図 5.6 定水位透水試験

##### 変水位透水試験：

透水係数の小さい粘土・シルトなどでは、定水位式では測定可能な十分な流量が得られないため、わずかな流量を供給するために図 5.7 に示すように細いスタンドパイプを用い、バルブの開閉により非定常な流れをつくる。この場合、水位差  $h$  は変数となり、微小時間  $\Delta t$  での水の連続条件から、

$$Q\Delta t = -a\Delta h \quad (5.12)$$

であり、ダルシーの式(5.5)を使うと次式が得られる。

$$-\frac{dh}{h} = k \frac{A}{aL} dt \quad (5.12')$$

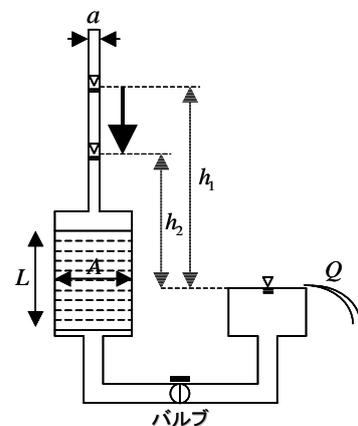


図 5.7 変水位透水試験

$$\text{時間 } t=0 \rightarrow T \text{ の間に, 水頭が } h=h_1 \rightarrow h_2 \text{ となる場合 } -\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = k \int_0^T \frac{A}{aL} dt \Rightarrow \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{kA}{aL} T$$

であり, 結局透水係数は次式により求められる.

$$k = \frac{aL}{AT} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \quad (5.13)$$

## (2) 現場透水試験

現場で直接透水係数を測定する方法はいくつか工夫されているが, そのなかで最も基本的な揚水孔と観測孔を用いた揚水試験法について原理を述べる. この試験法では, 図 5.8 に示すように下部に明確な不透水層がある場合, その上の層の主に水平方向の透水係数を測定することになる.

この方法ではボーリング孔からの揚水により揚水孔への地下水の流れをつくり, それが定常流になるのを待って計測をする. 地下水の動水勾配は後に述べるデュプイの仮定により地下水面勾配によって近似し,  $i \approx \frac{dh}{dr}$  で

表す.

流れの連続条件より, 揚水孔からの流量  $Q$  は

$$Q = ki \cdot 2\pi rh = k \frac{dh}{dr} \cdot 2\pi rh \quad (5.14)$$

$$\frac{Q}{2\pi r} \frac{dr}{r} = kh dh \quad (5.14')$$

これを, 揚水孔から距離  $r_1, r_2$  の 2 本の水位観測孔の水位  $h_1, h_2$  を用いて積分する.

$$\frac{Q}{2\pi} \log_e \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} k (h_2^2 - h_1^2) \quad (5.15)$$

ゆえに, 透水係数は次式で求められることになる.

$$k = \frac{Q}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} \log_e \frac{r_2}{r_1} \quad (5.16)$$

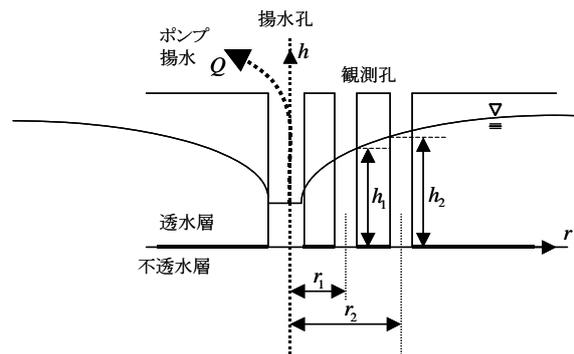


図 5.8 揚水法による現場透水試験

## 5.4 種々の地盤の透水係数と地下水の移動速度

5.2節で述べたように, 透水係数は土の粒径によって非常に幅の広い値をとる. しかも自然に堆積した地盤では, 同じ地盤に見えても場所による透水係数のばらつきがかなり大きい. 一般に, 土質の種類ごとに以下のような範囲の値をとる場合が多いが, ここで重要なのは 10 のべき乗オーダーの数値である.

礫:  $k = 10^{-2} \text{ cm/s}$  以上

砂:  $k = 10^{-3} \sim 10^{-2} \text{ cm/s}$

シルト:  $k = 10^{-5} \sim 10^{-4} \text{ cm/s}$

粘土:  $k = 10^{-6} \text{ cm/s}$  以下

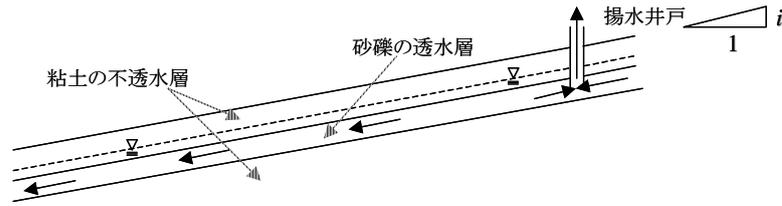


図 5.9 地下水流動の模式図

すなわち、必要な透水係数の精度は1桁目あるいは2桁目で十分である。実際の設計基準でも、たとえばダム  
の基礎地盤の条件として  $k = 2 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$  以下 のようにせいぜい有効数字1桁程度の精度で表現されており、  
むしろ10のべき乗オーダーがもっとも注目すべき重要な値となる。

それでは、上記のような透水係数では地下水はどの程度の速度で移動するものかを考えてみよう。例として土  
地利用が進んだ平野部を考え、そこでの動水勾配は地表面勾配程度として

$$i = 1/1000 \text{ (平野部)}$$

とすると、水の実流速  $v_n$  は土の間隙率を  $n = 0.5$  程度として

$$k = 1 \times 10^{-3} \text{ cm/s (砂層) の場合} \Rightarrow v_n = ki/n = 2 \times 10^{-6} \text{ cm/s} \Rightarrow 60 \text{ cm/year}$$

$$k = 1 \times 10^{-6} \text{ cm/s (粘土層) の場合} \Rightarrow v_n = ki/n = 2 \times 10^{-9} \text{ cm/s} \Rightarrow 0.06 \text{ cm/year}$$

すなわち、自然の勾配で流れている地下水流は通常非常に低速であることが理解できる。もちろん、井戸の汲み  
上げなどにより人為的に動水勾配が非常に大きくなる場合には、局所的に大きな移動速度になる。また、砂層に  
比べて粘土層の水はほぼ停止しているに近い状態であり、一般に地下水は砂や礫からなる透水層を通して移動す  
ると考えて良い。

### 5.5 成層地盤の透水係数の異方性

通常、地盤の透水係数は鉛直方向より水平方向が大きい。すなわ  
ち、水平方向の方が水が通りやすい。その理由は、地盤が一般的に  
図 5.9 に示すような水平な堆積構造を持っているからである。

これを理論的に理解するために、水平に堆積した層の重なり合っ  
た構造をもつ地盤の水平方向と鉛直方向の透水係数を導いてみよう。

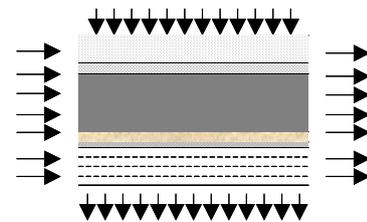


図 5.10 堆積構造と透水の異方性

#### 水平方向

図 5.11 のような水平方向に透水できる定水位透水試験を考える。

$$i = h/L, \quad H = \sum_j H_j$$

この場合、各層の透水流量の合計が全透水流量になるから、

$$Q = \sum_j Q_j = \sum_j k_j i H_j = i \sum_j k_j H_j \quad (5.17)$$

ゆえに、水平方向の透水係数は：

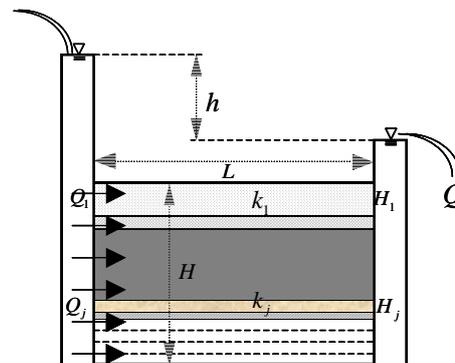


図 5.11 水平方向への定水位透水試験

$$k_h = Q/iH = \sum_j k_j H_j / H \quad (5.18)$$

したがって、 $k_h$  は  $k_j$  のうちのもっとも大きな値に影響される。すなわち、水通しの良い層が全体の透水性を左右する。

### 鉛直方向

図 5.12 のような鉛直方向に透水する定水位透水試験を考える。この場合、各層での損失水頭の合計が全損失水頭  $h$  になるから、

$$h = \sum_j h_j \text{ である。さらに、各層の層厚を } H_j \text{ とすると、}$$

$$H = \sum_j H_j, \text{ 各層の動水勾配は } i_j = h_j / H_j \text{ である。}$$

各層での透水流量は等しいから、

$$Q = k_1 i_1 L = \dots = k_j i_j L = \dots = k_n i_n L \quad (5.19)$$

したがって、全体の動水勾配は

$$i = h/H = \sum_j h_j / H = \sum_j i_j H_j / H = \frac{Q}{LH} \sum_j \frac{H_j}{k_j} \quad (5.20)$$

ゆえに、鉛直方向の透水係数  $k_v$  は

$$k_v = Q/iL = H / \sum_j \frac{H_j}{k_j} \quad (5.21)$$

したがって、 $k_v$  は  $k_j$  のうちのもっとも小さな値に影響される。すなわち、水通しの悪い層が全体の透水性の大小を左右してしまう。式(5.18)と式(5.21)を比較すると、つねに

$$k_v \leq k_h \quad (5.22)$$

が成り立つ。なぜなら、

$$H / \sum_j \frac{H_j}{k_j} \leq \sum_j k_j H_j / H \quad (5.23)$$

が成り立つからである。

実際の地盤においては、水平方向の透水係数が鉛直方向より 2 倍以上大きい場合がよく見られる。

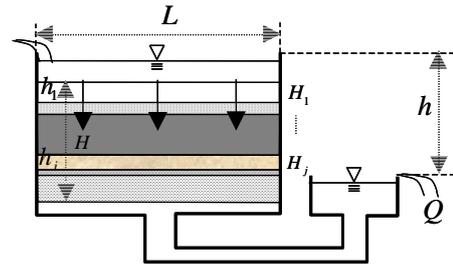


図 5.12 鉛直方向への定水位透水試験

クイズ 5.1: 上記の式(5.23)の根拠となる  $H / \sum_j \frac{H_j}{k_j} \leq \sum_j k_j H_j / H$  が常に成り立つことを証明せよ。

答えは参考文献(1)参照。

### 5.6 地下水流による浸透力と有効応力変化

地下水の流れは水頭損失を生み出すので、土粒子骨格の釣り合い力、すなわち有効応力にも影響を与えることになる。その効果を表すために、浸透力 (Seepage force)  $f$  を導入する。浸透力  $f$  は慣性力や電磁力と同様に単位体積あたりかかる力として定義される物体力 (Body force) である。

図 5.13 に示すように、座標  $s$  の方向に流れる一様な浸透流により断面積  $A$  の円筒形の境界で囲まれた土が受ける力はその区間の水頭差による力と等価であると考え、

$$f \cdot \Delta s \cdot A + F_1 - F_2 = f \cdot \Delta s \cdot A + \gamma_w \cdot \Delta h \cdot A = 0$$

$$F_1 - F_2 = \gamma_w \cdot \Delta h \cdot A$$

$$f = -\frac{\Delta h}{\Delta s} \gamma_w = i \gamma_w \quad (5.24)$$

すなわち、浸透力は動水勾配に比例する。この力は土粒子の有効応力により釣り合わなければならない。

一方、ダルシーの式により、

$$v = ki = \frac{k}{\gamma_w} f \Rightarrow f = \frac{\gamma_w}{k} v \quad (5.25)$$

すなわち、浸透力は流速に比例する。

土の要素の有効応力による力の釣り合いを考えるときは、図 5.14 に示すように、要素の面に有効応力をかけ、要素の体積に浸透力による力（透水力と名付ける） $F = f dx dy$  を加えればよい。

したがって、浸透流の存在により地盤内の有効応力分布は変化し、浸透流は地盤の安定性に影響を及ぼすことが分かる。

### 5.7 地下水流による地盤の破壊

地下水流が地盤の有効応力を変化させることから、浸透力が大きくなると地盤が破壊する現象が生じる。

浸透破壊は、ボイリング、ヒービング、パイピングの3種類に分けられるが、いずれも浸透力により有効応力がゼロ以下となり、地盤が破壊する現象である。

ボイリング破壊：

上向き浸透力により土の有効応力がゼロとなり、非粘性土の強度が失われる現象で、基礎掘削工事での最重要検討事項である。すなわち、図 5.15 のように定水位透水試験機の中の断面積  $A$ 、深さ  $L$  の土柱を考える。

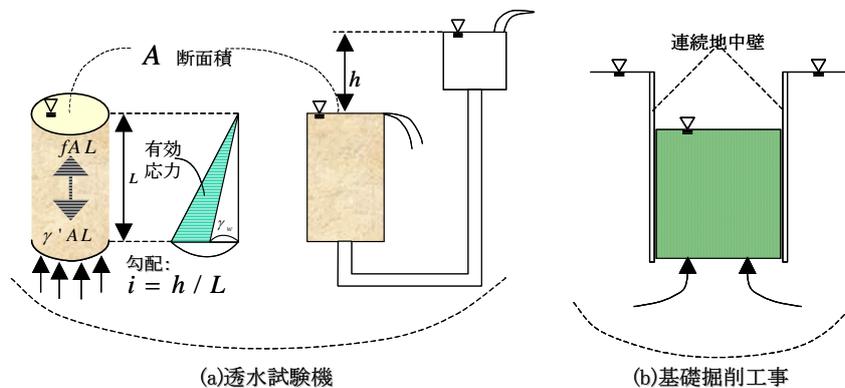


図 5.15 透水試験と基礎掘削工事での浸透力・有効応力

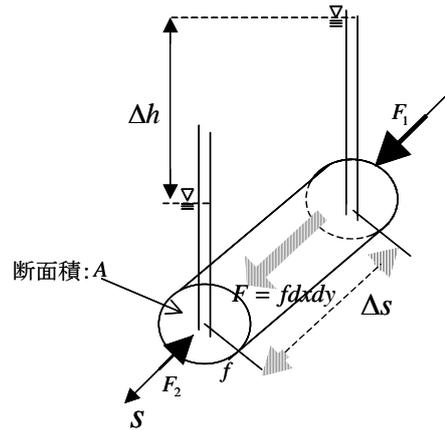


図 5.13 水の流れによる浸透力の考え方

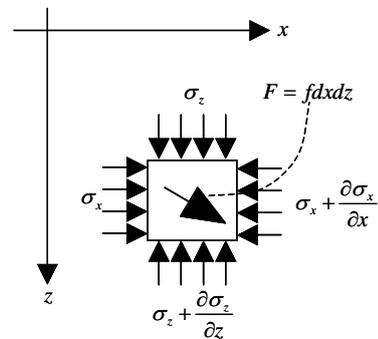


図 5.14 地盤の要素に働く有効応力と透水力

浸透力による上向きの透水力  $F = fAL$  と土の水中重量  $\gamma'AL$  が釣り合う時が土が浮き上がる限界状態だから

$$fAL = \gamma'AL \quad (5.26)$$

したがって、

$$f = \gamma' \quad (5.26')$$

さらに、式(5.24)より

$$f = \gamma' = i\gamma_w \quad (5.27)$$

なので、結局、限界状態の動水勾配  $i_{cr}$  は次式で表される。

$$i_{cr} = \gamma' / \gamma_w \quad (5.27')$$

3章のせん断の3.6節で学んだ土の破壊基準によれば、クーロンの破壊基準は  $\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi'$  と表せる。

非粘性土では  $c' = 0$  であるから、 $\sigma' = 0$  においては  $\tau_f = 0$ 、すなわち土のせん断強度は失われる。このような、砂地盤の浸透破壊をボイリング(Boiling)破壊と呼ぶ。ボイリング破壊は図 5.15 (b) に示すように、透水試験機の中だけでなく、基礎掘削工事においても実際に起きうる非常に危険な破壊現象である。すなわち、基礎掘削工事では、地下水を低下させ土留めをするために、鉄筋コンクリートの連続地中壁などで周囲を取り囲んで掘削を行う。地中壁の外側の地下水位は極力下げないようにするために、内外の地下水位に大きな差が生じ、それにより底部から地下水が浸透し、スケールは異なるが図 5.15 (a) と同じような浸透力が働くことになる。したがって、掘削部の土の有効応力に対して浸透力が大きすぎると、ボイリング破壊が起き、急激な破壊により大事故となる恐れがある。

ヒービング破壊：

一方粘性土では  $c' \neq 0$  なので、 $\sigma' = 0$  となっても  $\tau_f = 0$  とはならず、急激な破壊は生じない。しかし土の水中重量に比べて浸透力の方が勝るため、徐々に地盤が持ち上がる、「ヒービング(heaving)」が生じることになり、やはり重大な結果を招く。

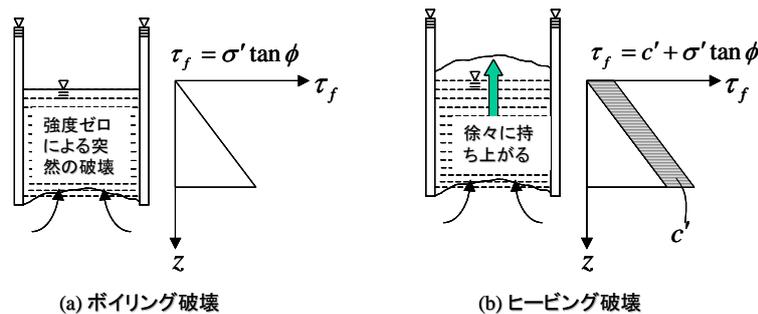


図 5.16 ボイリング破壊とヒービング破壊

ボイリングやヒービングが危惧される場合には、動水勾配  $i$  を限界動水勾配  $i_{cr}$  より小さく  $i < i_{cr}$  に保てばよい。もっとも確実な対策としては設計時に連続地中壁をさらに深く計画すれば安全性が増すことになるが、建設コストとのバランスを判断する必要がある。

パイピング破壊：

ボイリングやヒービングのような地盤の全面的破壊とは異なり、土の内部が部分的に浸食される破壊現象である。地盤中の細粒の土が水流により洗い流されることにより筋状に空洞ができ、それが拡大して全体破壊にいた

ることもある。粗い土粒子に囲まれた細かい土粒子などのように有効応力が十分作用していない土粒子は、全体的な限界動水勾配より以下でも、浸透力の作用で破壊し水に洗い流されやすくなることが原因である。ダムや堤防下流側斜面などの地下水の浸出面でとくに生じやすい。安定性上重要であり、実質流速（ $v_n = v/n$ ， $n$ ：間隙率）が土の粒径などから決まる限界値を超えるかどうかなどによりパイピングの可能性を判定することが多い。

細粒な土粒子が洗い流されようとした場合、その下流側にフィルター(filter)層を設置して、細粒土を受けとめパイピングを阻止する方法が土質材料を用いたフィルダムでは採用されている。そのためにフィルター層の材料が満たすべき粒度分布の条件はフィルター則と呼ばれている。

パイピング防止のためのフィルター則：

フィルダムの遮水材は細粒土でできているが、その外側は粗粒土の砂礫となっている。この場合、細粒土がパイピングで流出しないよう保護するため、細粒土と粗粒土の間に中間の粒径の材料をフィルターとして挟み、細粒土の流出を妨げる。このフィルターの粒径を決めるための主な考え方は以下の通り。

フィルターの粒径は

- 1) その空隙が細粒土が通過できない大きさとなっていること。
- 2) その透水性が細粒土に比べ十分の大きさを有し、フィルダム下流側の浸潤面を低下できること。
- 3) その粒度曲線(図 5.17 のような片対数グラフ上での曲線)が細粒土とほぼ平行で(これを相似粒度とよぶ)、

広い粒度範囲でフィルター効果を発揮できること。

上記 1), 2) に対応した具体的条件として以下が使われている。

a)  $D'_{15}/D_{85} < 5$  : フィルター効果

b)  $D'_{15}/D_{15} > 5$  : 排水効果

$D'_{15}$  : フィルターの 15% 粒径

$D_{15}$ ,  $D_{85}$  : 細粒土のそれぞれ 15%, 85% 粒径

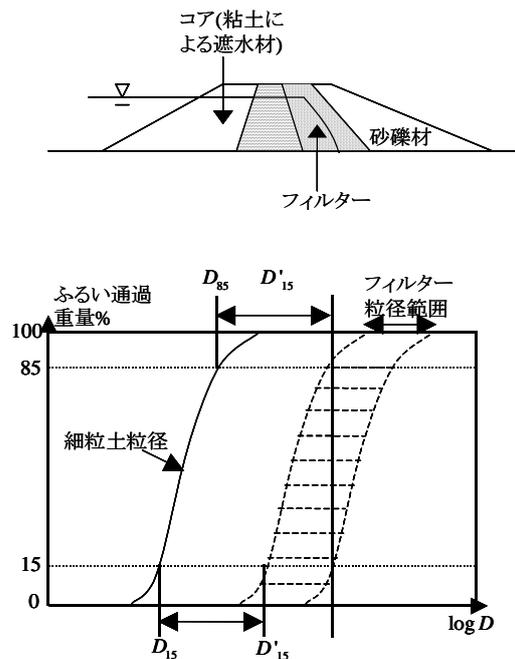


図 5.17 フィルダムのフィルターとフィルター則

### 5.8 地下水のポテンシャル関数

時間によって変化しない定常的な地下水の流れを解析的に解くための基礎方程式として、ラプラス (Laplace) の方程式がある。以下では、流れの連続条件とダルシーの式からラプラスの方程式を導いてみよう。

図 5.18 に示す辺の長さが  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  の土の直方体要素への水の流出入を考える。流れの連続条件より

$$\rho_w \left( v_x - v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho_w \left( v_y - v_y - \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dz dx + \rho_w \left( v_z - v_z - \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy = 0$$

これを整理して

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.28)$$

ここでダルシー則を用いて、流速を水頭  $h$  の各方向の動水勾配で表すと、

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

ここで、透水性の等方性  $k = k_x = k_y = k_z$  を仮定して、(5.13)に代入する。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5.29)$$

この式はラプラスの方程式と呼ばれる。

ラプラス方程式では一般的に、水頭  $h$  を  $\phi$  (ポテンシャル関数) で表し、さらにラプラス演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を用いて、次式のように表す場合が多い。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.30)$$

### 5.9 地下水の流れ関数

2次元場でポテンシャル関数  $\phi$  が次式の2次元のラプラス方程式を満たす場合を考える。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.31)$$

これによる、等ポテンシャル線  $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$  を図 5.19 に概念的に示す。等ポテンシャル線は地下水位とほぼ同じと考えて良いので、地下水の流れは当然、等ポテンシャル線に直交する方向 (ポテンシャル勾配が最大の方向) に生じることになる。

ここで、その地下水の流れに相当する流れ関数  $\psi$  を導入する。

すなわち、次の2組の関数を設定することになる。

$$\phi = \text{一定} : \text{等ポテンシャル線} \quad (5.32)$$

$$\psi = \text{一定} : \text{流線} \quad (5.33)$$

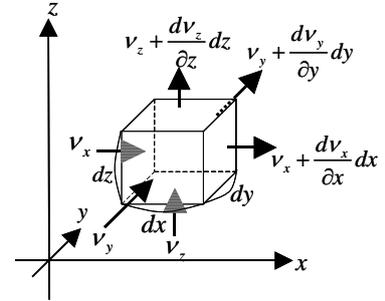


図 5.18 3次元直方体地盤要素への定常地下水流

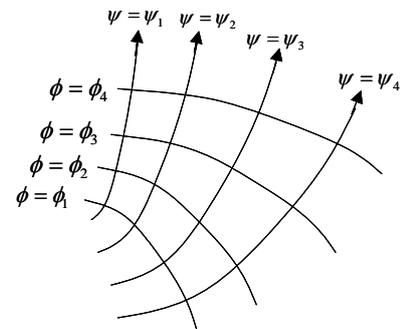


図 5.19 等ポテンシャル線と流線

式(5.32), (5.33)を全微分形で表せば, 等ポテンシャル線上では  $d\phi = 0$ , 流線上で  $d\psi = 0$  であるから,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0 \quad (5.34)$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0 \quad (5.35)$$

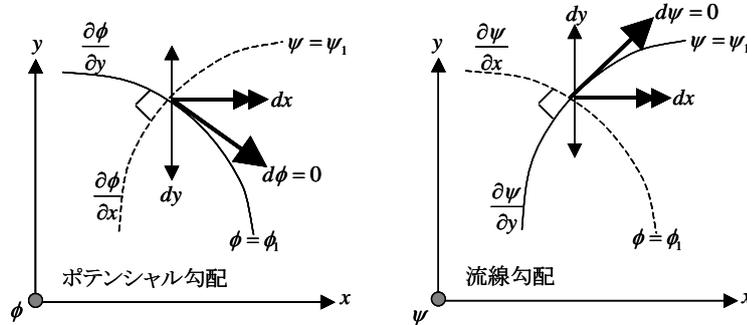


図 5.20 等ポテンシャル線と流線に沿った全微分

ここで, 図 5.20 を参考に,  $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y)$  と  $(\partial\psi/\partial x, \partial\psi/\partial y)$  は等ポテンシャル線, 流線の接線ベクトルの  $x$  方向,  $y$  方向の勾配を表している. また,  $dx, dy$  は接線ベクトルの  $x$  方向,  $y$  方向成分を示している. 一方,  $d\psi = 0$  の流線の接線ベクトルの  $dx$  と  $dy$  の比は, 当然各方向の流速の比に等しいことから

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const.}} = \frac{v_y}{v_x} \quad (5.36)$$

で定義できるので, これより  $c$  を任意の定数として

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = c \quad (5.36')$$

とおくと,  $dx = cv_x, dy = cv_y$  なので, 式(5.35)より

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = cv_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + cv_y \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (5.37)$$

ここで,  $x$  方向,  $y$  方向の流速はダルシーの式より

$$v_x = -k \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

であることから, これを式(5.37)に代入すると,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^T = 0 \quad (5.38)$$

2つの曲線が直交する場合には, その微係数のベクトルの内積はゼロとなることから, 式(5.38)は図 5.20 に示すように  $\phi = \text{一定}$  (等ポテンシャル線) と  $\psi = \text{一定}$  (流線) の2本の接線ベクトルが直交していることを意味している. したがって, 等ポテンシャル線と流線は直交することが, 理論的に説明できた.

ところで, 流線とは水粒子一粒一粒の流れの軌跡を表していると解釈できる. したがって, 2本の任意の流線の間を流れる水の流量はその上流でも下流でも一定であることが分かる. なぜなら, 地下水流を層流とすれば, 水粒子の流れの軌跡はお互いに交差することなく整然と流れると解釈できるからである.

## 5.10 フローネット解析

前節において、定常地下水流のラプラス方程式を満たすポテンシャル関数と流れ関数の検討から

(a)等ポテンシャル線と流線が直交する性質

(b)2本の流線の間の流量が一定である性質

が示された。ここではこの2つの性質を用いて定常地下水流を解析する方法を考える。

正方形フローネットの性質

図 5.21 に示すように、内接円を描きながらそれに接し、かつ互いに直交する等ポテンシャル線と流線のフローネットを構築し、各ネットがなるべく正方形に近くなるようにする。すると、2本の流線  $\psi_1, \psi_1$  の間の流量  $q_1$  は一定であるので、ダルシーの式により、

$$q_1 = k \frac{\Delta h_1}{d_1} d_1 = k \frac{\Delta h_m}{d_m} d_m \Rightarrow \Delta h_1 = \Delta h_m \quad (5.39)$$

また、等ポテンシャル線  $\phi_1, \phi_2$  の間の水頭差  $h_1$  は等しいので、

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= k \frac{\Delta h_1}{d_1} d_1 \\ q_n &= k \frac{\Delta h_1}{d_n} d_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow q_1 = q_n \quad (5.40)$$

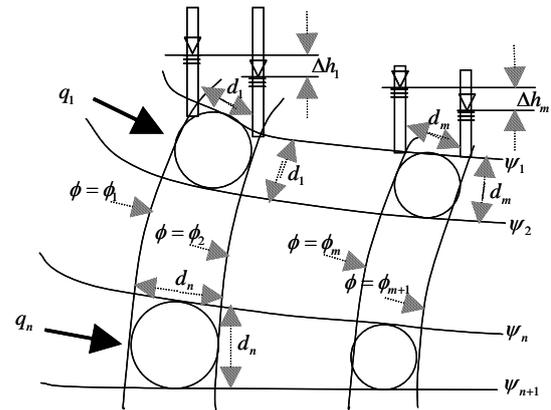


図 5.21 正方形フローネットでのポテンシャルと流量

すなわち、正方形フローネットにおいては、

- 1) 全ての隣り合う等ポテンシャル線の水頭差は等しく、また、
- 2) 全ての隣り合う流線の間を流れる流量は等しい。

これは、正方形フローネットが、5.9 節で学んだポテンシャル関数と流れ関数の性質を保持していることを意味している。したがって、正方形フローネット解析により、ある境界条件の下でのラプラス方程式の解を図解法的に求めることができる。

### 正方形フローネット解析の手順

ここでは、図 5.22 のダム基礎地盤の浸透流の例について考える。

- 1) すべての等ポテンシャル線と流線の境界条件を設定する。

(例) 等ポテンシャル線の境界条件：貯水池底面

流線の境界条件：ダム底面境界、不透水境界

- 2) 境界条件の最短の流線の始点と終点の水頭差を適当な水頭差増分  $\Delta h$  で整数個  $n$  に分割する。

ここに、最大と最小の等ポテンシャル線間の全水頭差を  $h^*$  とすれば、 $\Delta h = h^* / n$  である。

- 3)  $n$  個に分割した最短流線上の点を出発点として、水頭差増分  $\Delta h$  で等ポテンシャル線と流線とが直交するよう内接円を使いながら正方形フローネットを描く。
- 4) 各等ポテンシャル線の水頭を計算する。 $i$  番目の等ポテンシャル線の水頭は出発点の水頭を  $h_0$  として

$h = h_0 - (i-1)\Delta h$  である。また、各点での水圧は  $u = (h+z)\gamma_w$  ( $z$  は水頭  $h$  の基準レベルからの深度) により計算する。

5) 適当なフローネット (サイズ  $d \times d$ ) を取り出し、各流線間の流量  $q$  を計算する。地盤の奥行きを単位厚さ 1 とすると、

$$q = k \frac{\Delta h}{d} (d \times 1)$$

流線間の流れの数を  $m$  とすると、全流量は

$$Q = mq$$

で計算される。

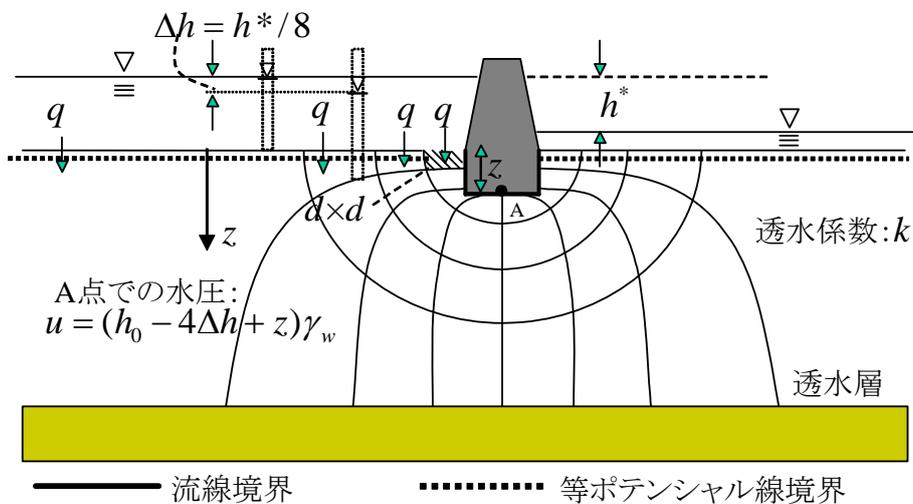


図 5.22 正方形フローネットでのコンクリートダム基礎の定常浸透流の解析

### 5.11 地下水面のある流れの解法 (非定常流)

前節の例題では地表面下に自由水面が存在しなかったが、ここでは地下に自由水面 (地下水面あるいは浸潤面) のある流れについて考える。図 5.23 のように、 $x-z$  平面内で  $x$  方向への 2 次元な流れを考える。ダルシーの式より、流速  $v$  は

$$v = ki = -k \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad (5.41)$$

であるが、ここで地下水面の高低差を  $z$  として

$$i = -\frac{\Delta h}{\Delta s} \approx -\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (5.42)$$

のように近似する。すなわち、地下水面のある流れ

での動水勾配は、勾配があまり大きくない範囲で地下水面勾配でほぼ近似できるとするものである。これをデュ

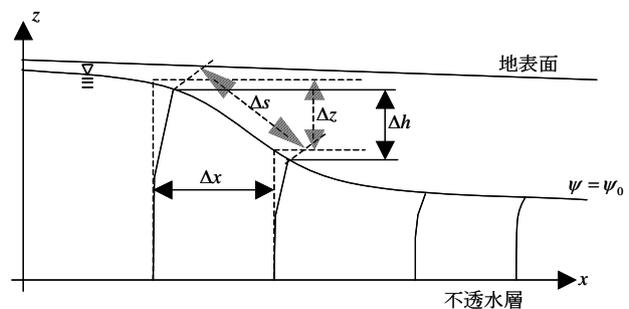


図 5.23 地下水面の変動する非定常浸透流の解析

プイ (Dupuit) の仮定と呼ぶ。すなわち、

- 1) 流速は同一  $x$  座標上で一定
- 2) 鉛直方向の流れ成分を無視

を仮定していることになる。すると、流速は

$$v = -k \frac{\Delta z}{\Delta x} = -k \frac{\partial z}{\partial x} \quad (5.43)$$

つぎに、 $x, y$  の水平 2 方向への地下水面のある流れを考える。図 5.24 に示すように底面を不透水層とし、そこから地下水面までの高さを  $z$ 、2 辺の長さを  $dx, dy$  とする角柱を考えると、 $dt$  時間内の角柱内への流出入による水の収支は、ダルシーの式

$$v_x = -k \frac{\partial z}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial z}{\partial y} \text{ を考慮すると次式で表される。}$$

$$-\left( \frac{\partial v_x z}{\partial x} + \frac{\partial v_y z}{\partial y} \right) dx dy dt = \left( \frac{\partial}{\partial x} k z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k z \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy dt \quad (5.44)$$

一方、 $dt$  時間内の角柱内の水面変化による体積変化は、水面の上昇速度は  $\partial z / \partial t$  だから、

$$S \frac{\partial z}{\partial t} dx dy dt \quad (5.45)$$

で表される。ここに、 $S$  は貯留係数と呼ばれる地盤定数で、地下水面の上下変動により土の飽和度が  $S_r = 0$  (地下水面以上) と  $S_r = 100\%$  (地下水面以下) をとると単純に仮定した場合には土の間隙率  $n$  に等しく、 $S = n = e / (1 + e)$  ( $e$ : 間隙比) である。実際には、土の間隙中の気泡の効果や水面変動の履歴などの影響を受けて  $S$  は複雑に変化するが、いずれにしても  $S < n$  と考えられる。

式(5.44)と式(5.45)を等しいとおくと、結局、

$$S \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k z \frac{\partial z}{\partial y} \quad (5.46)$$

$k$  が  $x, y$  によらず一定と仮定する場合は、

$$\frac{S}{k} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( z \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + z \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (5.47)$$

これは非線形な式であり、そのままでは解けない。そこで、水面勾配は非常に小さい場合については、

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \approx 0 \quad (5.48)$$

が成り立つこと、対象領域で平均値  $z = z_0$  とおくと、以下のような線形式で表される。

$$\frac{S}{k} \frac{\partial z}{\partial t} = z_0 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (5.49)$$

これに、境界条件と初期条件を入れることにより、時間とともに水面形状の変動する地下水流の解が得られる。

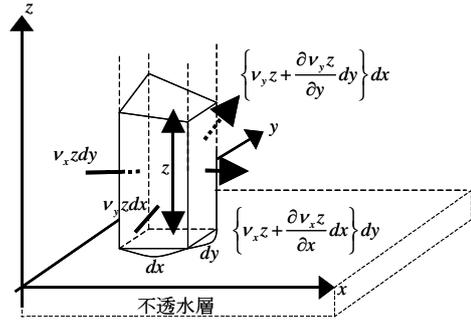


図 5.24 地下水面の変動する非定常浸透流での流れの条件

## 6 地震時の地盤の挙動

地震時に地盤がどのように挙動するかを知ることは、すべての構造物の設計を行う上で不可欠である。ここでは、そのためのごく初歩的知識として、地盤中での地震波の伝播とその定式化の基本、地震波を受ける地盤の応力状態、地盤の地震時の破壊形態である液状化について簡単に述べる。

### 6.1 地盤中の地震波の伝播

地震波は地中深くの震源から深部地盤を通過して表層地盤に伝播し、地表近くの構造物に影響を与える。地震波には図 6.1 に示すように、**実体波**と**表面波**がある。実体波は境界の影響を受けない弾性体中を伝わる波であり、表面波は実体波が自由表面のような境界に至ったときにその境界条件を満足する形で境界を伝わっていく波動である。実体波はP波とS波に分けられる。地震の時まず最初に到達する波はP波であり、次に主要動部分のS波が到達する。さらに地震の後半の部分で感じるゆっくりした波は主に表面波からなっている。

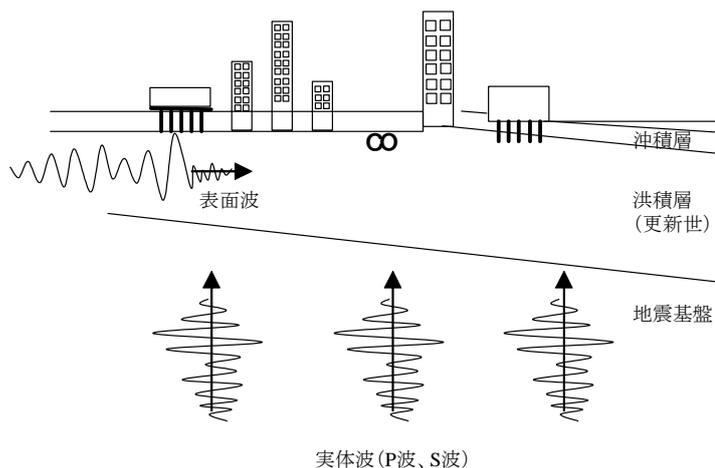


図 6.1 地盤への地震波の伝わり方

地震の実体波のP波やS波は、震源から地殻を通過して、図 6.2 (左) に示すようにサイトの深部地盤にある入射角で入ってくる。しかし、マクロにみると表面近くほど波の伝播速度が低い地盤構造となっているため、スネル (Snell) の法則により、地表に近づくほど入射角は小さくなる。

スネルの法則について説明する。各々の伝播速度が  $V_1$ 、 $V_2$  ( $V_1 < V_2$ ) の二つの地層 1、2 の境界での波の屈折について考える。図 6.2 (右) のように  $\theta_2$  の入射角で地層 2 から 1 の境界に波頭が一直線をなす平面波が入射する場合、同じ角度の反射波と角度  $\theta_1$  の屈折波が生じる。屈折波の角度  $\theta_2$  は次式により算定される。

$$\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = V_1 / V_2 \quad (6.1)$$

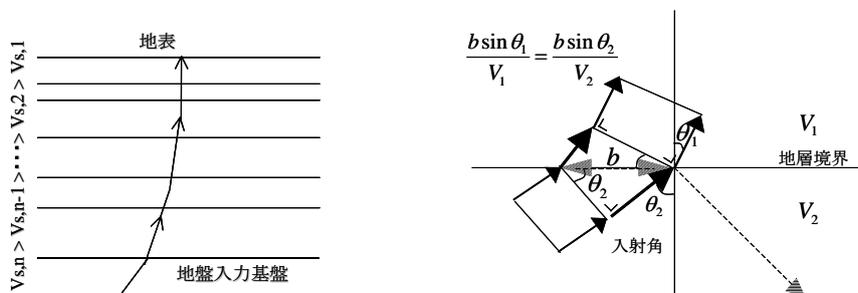


図 6.2 実体波の屈折による表層地盤での鉛直伝播 (左) とスネルの法則 (右)

この式は、図中に示すように平面波の波頭を考えると、先に地層1に入った波頭は地層2の波頭に比べて遅く進む分だけ、波頭の角度が変化することから容易に理解できる。そして、各地層の境界ごとにこのような現象が繰り返されることにより、地表近くの水平に層を成す成層地盤での実体波の伝搬はほぼ鉛直の1次元伝播で表すことができる。そこで、ここではまず、1方向に1次元的に伝播する平面波について考える。

## 6.2 SH波, P波の1次元伝播式

波の伝播方向を  $z$  方向 (鉛直方向), 振動方向が  $x$  方向 (水平方向) のS波をSH波とよぶ。このSH波の  $x$  方向の変位を  $u$  とし、図 6.3 に示す厚さ  $dz$ , 断面積  $A$  の要素に働く  $x$  方向の力の釣り合いを考える。要素に作用する慣性力

$X = -\rho A dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  とせん断力が釣り合っていることから

$$A \left\{ \tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{dz}{2} - \left( \tau - \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right\} - \rho A dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

となり、これを整理すると、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6.2)$$

となる。ここで、せん断応力  $\tau$  とせん断ひずみ  $\frac{\partial u}{\partial z}$  の間にせん断剛性  $G$  を用いて弾性体の応力～ひずみ関係を考

えると、

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.3)$$

と書けるので、これを式(6.2)に代入して、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

または、S波速度

$$V_s = \sqrt{G/\rho} \quad (6.5)$$

を用いて、SH波の波動方程式が次式のように得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.6)$$

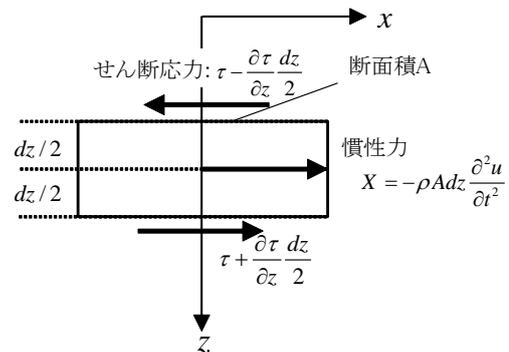


図 6.3 SH波 (水平せん断波) の伝播における要素の力の釣り合い

クイズ： 式(6.5)を用いて  $G = 100 \text{MPa}$ ,  $\rho = 2 \text{t/m}^3$  の地盤中を伝わる S 波速度  $V_s$  を求めよ。

次に、弾性体の棒中を伝わるP波の波動伝播を考えてみる。図 6.4 に示すように、要素に働く圧縮応力と慣性力の釣り合いより、

$$A \left\{ \left( \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left( \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right\} - \rho A dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

が成り立つ。ここに、棒の圧縮応力  $\sigma$  と圧縮ひずみ  $\frac{\partial w}{\partial z}$  の間にヤング

係数  $E$  を用いて弾性的な応力～ひずみ関係  $\sigma = E \frac{\partial w}{\partial z}$  を考慮すると、

結局、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = V_r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.7)$$

ただし、

$$V_r = \sqrt{E/\rho} \quad (6.8)$$

は、棒中を伝わる P 波速度である。

上式は自由な側面を有する棒の中を棒の太さと同程度以上の波長を持つ P 波が伝わる場合を想定して導かれた。一方、棒の太さに比べて非常に短い波長の P 波の伝播では、自由な側面の影響が失われ、無限弾性地盤中の P 波の伝播問題に移行する。無限弾性地盤中において、 $z$  方向に振動し、 $z$  方向に伝播する P 波を考える場合には、3次元下の波動方程式より、 $x$  方向、 $y$  方向の変位を  $u = v = 0$  として次式が導かれる。

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.9)$$

したがって、無限弾性地盤中の P 波速度  $V_p$  を

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho} \quad (6.10)$$

として、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.11)$$

式(6.11)の伝播速度は式(6.8)の速度とは明らかに異なり、その比は次式となる。

$$V_r/V_p = \sqrt{E(\lambda + 2G)} = \sqrt{E/\left(\frac{vE}{(1+v)(1-2v)} + \frac{E}{1+v}\right)} = \sqrt{(1+v)(1-2v)/(1-v)} \quad (6.12)$$

ここに、 $\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}$ 、 $\mu = G = \frac{E}{2(1+v)}$  はラメの定数である。また、S 波と P 波の速度の比  $V_s/V_p$  は、

式(6.5)(6.10)より次式となる。

$$V_s/V_p = \sqrt{G/(\lambda + 2G)} = \sqrt{G/\left(\frac{2v}{(1-2v)}G + 2G\right)} = \sqrt{(1-2v)/2(1-v)} \quad (6.13)$$

これらの速度比はすべてポアソン比のみの関数となり、**図 6.5** に示すように  $v = 0 \rightarrow 0.5$  の間で

$$V_s/V_p = 1/\sqrt{2} \rightarrow 0, \quad V_r/V_p = 1 \rightarrow 0$$

の値をとる。

次に式(6.6)(6.7)(6.11)が実際に波動の伝播を表すことを確かめてみよう。一般に、**図 6.6** に示すように、 $z$  の正方向に伝播する波の変位  $u$  は

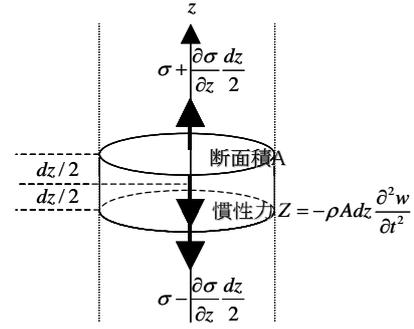


図 6.4 一次元 P 波の伝播における要素の力の釣合い

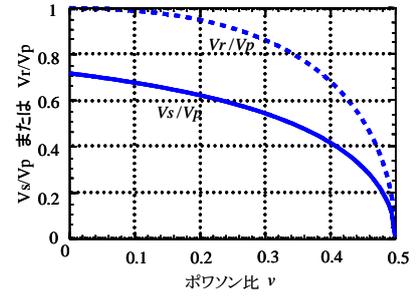


図 6.5 伝播速度比  $V_s/V_p$  および  $V_r/V_p$  のポアソン比に対する変化

$$u = af(z - Vt) \quad (6.14)$$

で表される。これは、 $z - Vt = c = \text{一定}$ の場合に式(6.14)は同じ波形となることから、 $t = t_1$ で $z = z_1$ であった波が  
 $t = t_1 + \Delta t$  に  $z = z_1 + \Delta z$  となる場合、

$$z_1 - Vt_1 = z_1 + \Delta z - V(t_1 + \Delta t) = c$$

したがって、

$$\Delta z - V\Delta t = 0 \quad \text{より} \quad V = \Delta z / \Delta t$$

すなわち、式(6.14)は  $z$  の正の方向に伝播速度  $V$  で伝播する波を表すことが分かる。式(6.14)の変位  $u$  を時間で1回微分すると粒子速度  $v$  が得られる。ここで、

$$\eta = z - Vt$$

とおくと、

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

一方せん断ひずみ  $\gamma$  は、

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

したがって、

$$\gamma = -v/V \quad (6.15)$$

すなわち、進行波により地盤中に生ずるせん断ひずみ  $\gamma$  は速度波 形の符号を反転したもの に比例することになる。地盤を作る土は非線形体であり、 $\gamma$  が大きくなるほどせん断剛性や S 波速度が低下するため、 $\gamma$  の値をあらかじめ知ることは、大地震のときに地盤がどのように揺れるかを知るために不可欠である。

また、式(6.14)の変位を時間で2回微分すると加速度波となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \left( -V \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

一方、 $z$  で2回微分すれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

したがって、上の2つの式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

となるが、これは式(6.6)(6.7)(6.11)と同じ形である。すなわち、式(6.14)は波動方程式の解となっていることがわかる。式(6.14)に、さらに  $z$  の負の方向に伝播する波動も重ね合わせると、一般的な式としては以下の形をとる。

$$u = af_1(z - Vt) + bf_2(z + Vt) \quad (6.16)$$

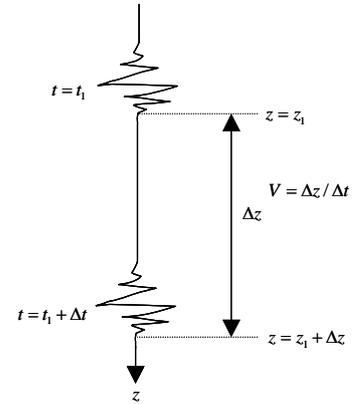


図 6.6  $z$  の正方向に進む波動伝播

### 6.3 SH波により土が受ける応力と試験機での再現

地盤や構造物が受ける地震波の影響のうち、一般的にはSH波の影響がもっとも大きい。SH波を受けたときの地盤要素に加わる応力状態を再現するための試験として図 6.7 に示す単純せん断試験機がある。すなわち最初に土を原地盤と同じく側方拘束で鉛直に $\sigma_z$ で圧密し(水平応力は $K_0\sigma_z$ : $K_0$ は有効応力についての静止土圧係数),その後,地震に対応した繰り返しせん断を土の試料の水平面に直接加えるものである。この場合,第3章で学んだように,せん断にともなって最大主応力面が回転することになる。

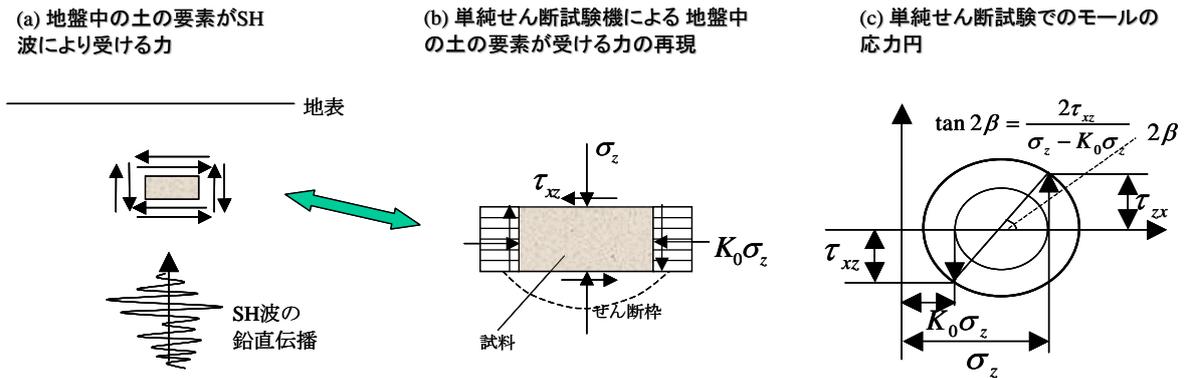


図 6.7 地盤中の要素の SH により受ける力の単純せん断試験による再現とモールの応力円

単純せん断試験機の応力状態はSH波により土が受ける応力状態に直接的に対応しているが,この試験機よりも取り扱いが容易で普及している三軸試験機によっても近似的な試験がよく行われている。この場合,土の要素は図 6.8 のように地震前に初期有効応力 $\sigma_3$ で等方圧密されている状態で単純化し,それに縦方向から繰り返し応力振幅 $\sigma_d = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)$ の軸応力変動を加える。

この場合の有効応力変化をモールの応力円で表すことを考える。ただし,モールの円は3次元応力状態を表せないで2次元で考える。まず, $\sigma_d = +(\sigma_1 - \sigma_3)$ を加えた場合(三軸圧縮応力状態と呼ぶ)には,非排水状態で

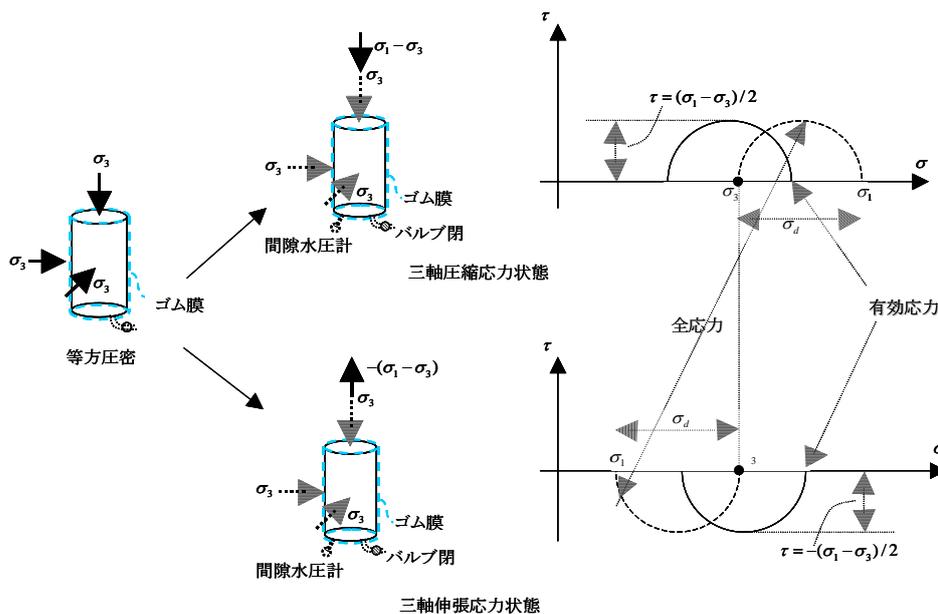


図 6.8 SH 波により土が受ける応力状態の三軸試験機での近似的再現

あるため2次元で考えれば平均主応力が  $\Delta p = \sigma_d / 2$  だけ増加し、第3章の  $\Delta u = B\Delta p + A'\Delta q$  の関係式から、飽和土では  $B = 1.0$  だから、等方応力の増分  $\Delta p = \sigma_d / 2$  はすべて間隙水圧増分になることになる。したがって、ダイレイタンスーを考えない場合 ( $A' = 0$ ) には、有効応力のモール円は図 6.8 に示す  $\sigma_3$  を中心とする実線の円となる。一方、負の軸応力  $\sigma_d = -(\sigma_1 - \sigma_3)$  を加えた場合 (三軸伸張応力状態と呼ぶ) にも、間隙水圧増分の符号が異なり、最大・最小主応力が入れ替わるが、有効応力のモール円はやはり  $\sigma_3$  を中心とする実線の円となる。この考え方は応力振幅の大きさによらず成り立つから、繰り返しせん断による有効応力のモール円は常に  $\sigma_3$  を中心とする同心円となることが分かる。

このような三軸試験での応力状態は主応力面が水平と鉛直に固定されており、主応力面がせん断応力の変化とともに回転する図 6.7(c) に示す単純せん断試験での応力状態とは異なっているが、試験の容易性などから三軸試験機による試験も多く行われている。また単純せん断試験において、等方圧密状態 ( $K_0 = 1.0$ ) から繰り返しせん断を加える場合と三軸試験による応力状態はほぼ同一であると言える。

クイズ：図 6.7(c) と図 6.8 のモール円を比較して、単純せん断試験において等方圧密状態 ( $K_0 = 1.0$ ) から繰り返しせん断を加える場合と、三軸試験による応力状態のモール円はほぼ同一であることを示せ。

以上においては、モールの応力円で考えるために2次元の応力状態を考えた。しかし実際は3次元問題であるため、三軸試験での平均主応力の増分は  $\Delta p = \pm \sigma_d / 2$  ではなく  $\Delta p = \pm \sigma_d / 3$  となるため、軸応力の変動にともなって、有効応力円の中心は  $\sigma_3 \pm \sigma_d / 6$  だけ変動することになる。したがって、三軸試験の結果を単純せん断応力状態に対応させるためには、間隙水圧の値から  $\pm \sigma_d / 6$  だけ差し引く必要がある。

#### 6.4 液状化現象とその影響

緩い砂質や礫質の飽和地盤が非排水状態でSH波により繰り返しせん断を受けると、液状化と呼ばれる破壊現象にいたる。単純せん断試験機を用いてその現象を模擬すると、図 6.9 に示すような結果が得られる。すなわち、図中(b)の  $\sigma' \sim \tau$  関係 (第3章 3.11 節で学んだ  $p \sim q$  平面表示の  $q$  軸を  $1/2$  にしたもの) から分かるように、繰り返しせん断により有効応力が低下し、それにもない図中(a)の応力~ひずみ関係は勾配が緩くなり柔らかくなる。すなわちダイレイタンスー現象により間隙水圧が上昇し、初期有効応力  $\sigma'_0$  がその分減少する。やがて、有効応力がゼロになると、砂礫のような非粘性土ではせん断強度が完全に失われ、いわゆる液状化にいたる。

ここで、地表まで地下水で飽和した地盤を考えると、静水圧

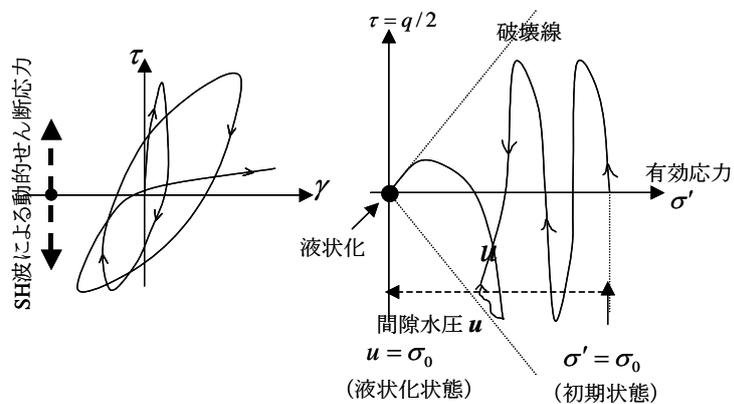


図 6.9 非排水せん断試験での応力~ひずみ関係と有効応力経路

を除いた地盤の初期鉛直有効応力は図 6.10 (a) のように分布し  $\sigma'_v = (\rho_{sat} - \rho_w)z$  であり、過剰間隙水圧は  $u = 0$  である。液状化時には図(b)のように  $\sigma'_v = 0$  となるため過剰間隙水圧が  $u = (\rho_{sat} - \rho_w)z$  だけ上昇し、静水圧と合わせた全水圧は  $(\rho_{sat} - \rho_w)z + \rho_w z = \rho_{sat} z$  となって、飽和密度  $\rho_{sat}$  の泥水となる。液状化して一時的に泥水状態となった砂粒子が時間とともに沈降・再堆積する過程で、余剰間隙水が上昇する。そのときの砂層中には図(b)のように

$$i_c = \frac{\Delta h}{z} = \frac{(\rho_{sat} - \rho_w)gz / \rho_w g}{z} = (\rho_{sat} - \rho_w) / \rho_w$$

の動水勾配が生じるが、これは第 5 章の 5.6 で述べたボーリング破壊時の限界動水勾配に等しいことが分かる。すなわち、液状化とは地震波の繰り返し非排水せん断により初期有効応力がすべて過剰間隙水圧にかわり、その動水勾配によってボーリング破壊が起こっていると解釈できる。

砂の場合、クーロンの破壊基準  $\tau_f = c' + \sigma'_v \tan \phi'$  において  $c' = 0$  であるから、 $\sigma'_v = 0$  になると、せん断強度  $\tau_f = 0$  となり、地盤はせん断応力に対して抵抗力がゼロとなる。つまり、液状化すると地盤の強度が失われるため図 6.11 に示すように、地表の構造物は沈下するし、埋設構造物は相対的に浮き上がる。また、地盤は傾斜角がわずかでも水平方向に流動する場合があります、埋設管や杭基礎などに大きな被害が生じる。

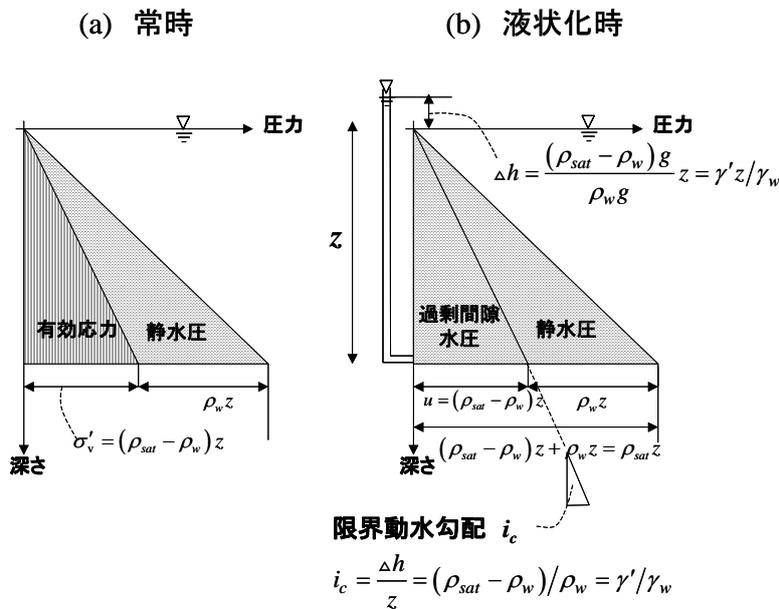


図 6.10 常時(左)と液状化時(右)の有効応力と水圧分布

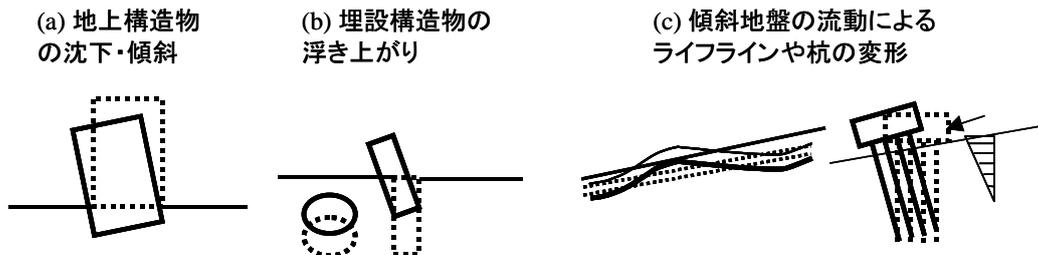


図 6.11 液状化による構造物の被害のイメージ